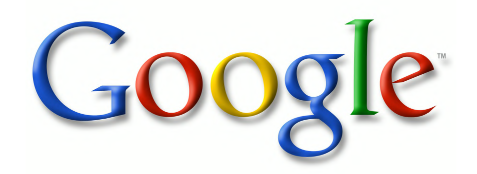
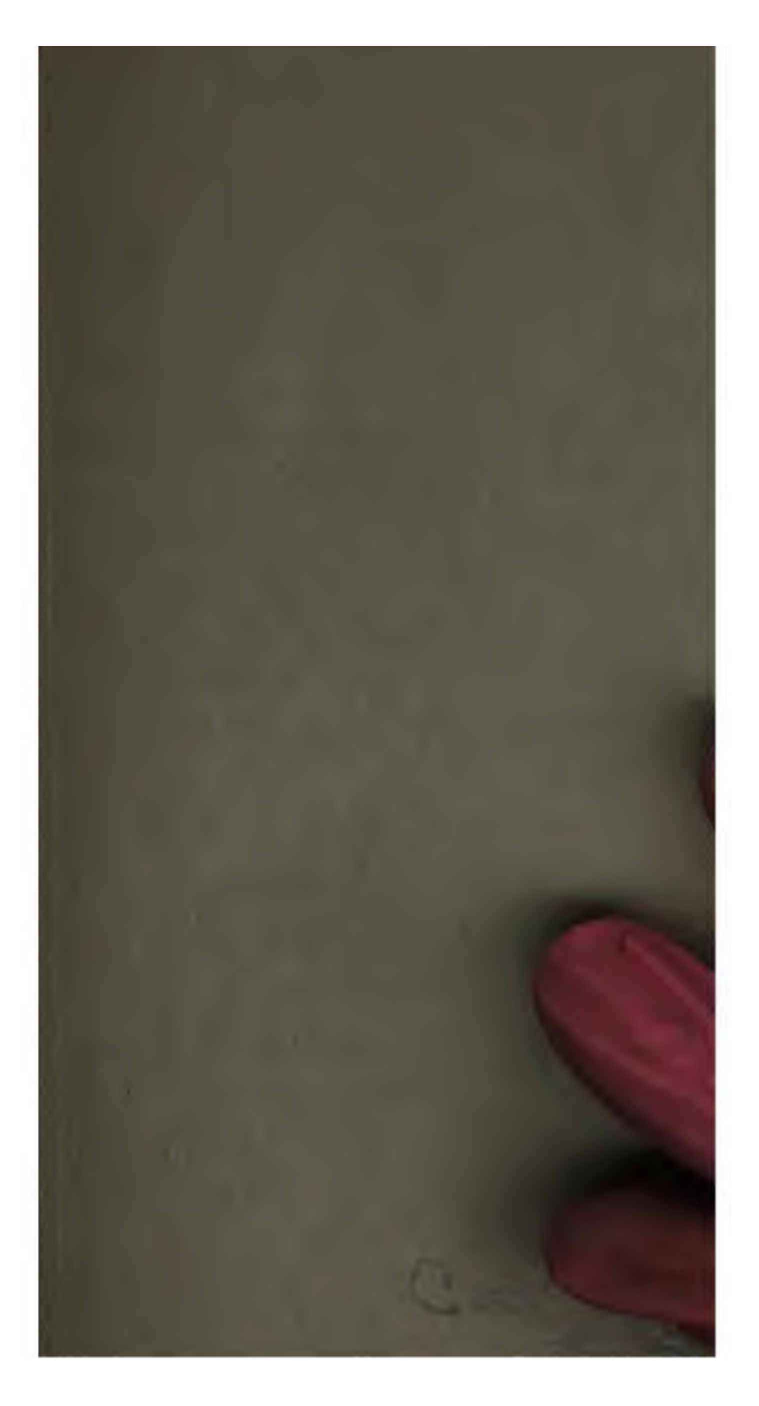

Google


3 3433 06644515 0











# Grundsätze der Mechanik

vom

## Gleichgewicht und der Bewegung

mit Anwendung

auf einzelne Probleme des Maschienenwesens, namentlich auf das Perpetuum mobile etc.

dargestellt

von

L. N. M. Carnot,

Mitglied des französischen National-Instituts, der Academie der Künste und Wissenschaften zu Dijon u. s. w.

---

Aus dem Französischen übersetzt.

---

Herausgegeben

von

C. S. Weiß,

D. der Philosophie, mehrerer gelehrten Gesellschaften Mitglied.

---

Mit Kupfern.

---

Leipzig 1805

bey J. C. Hinrichs.

## Vorerinnerung des Herausgebers.

Das Original des hier in einer Uebersetzung mitgetheilten Werkes erschien ohnlängst in Paris unter dem Titel: „Principes fondamentaux de l'equilibre et du mouvement, par L. N. M. Carnot, de l'Institut national de France, etc. à Paris, an XI — 1803." XXII und 262 S. 8. Die günstige Aufnahme, die es in den französischen Zeitungen fand, und der Name des Verfassers veranlaßten den Verleger, eine Uebersetzung davon zu veranstalten, und er übertrug es mir, die gegenwärtige Uebersetzung, welche ich nicht selbst gemacht habe, vor dem Drucke zu revidiren, und mit dem Originale zu vergleichen. Ich glaube, dieß, ohngeachtet vie-



Carn

F

# Grundsätze der Mechanik

vom

## Gleichgewicht und der Bewegung

mit Anwendung
auf einzelne Probleme des Maschienenwesens, namentlich auf das Perpetuum mobile etc.

dargestellt
von

L. N. M. Carnot,
Mitglied des französischen National-Instituts, der Academie der Künste und Wissenschaften zu Dijon u. s. w.

---

Aus dem Französischen übersetzt.

---

Herausgegeben
von

C. S. Weiß,
D. der Philosophie, mehrerer gelehrten Gesellschaften Mitglied.

---

Mit Kupfern.

---

Leipzig 1805
bey J. C. Hinrichs.





## Vorerinnerung des Herausgebers.

Das Original des hier in einer Uebersetzung mitgetheilten Werkes erschien ohnlängst in Paris unter dem Titel: „Principes fondamentaux de l'equilibre et du mouvement, par L. N. M. Carnot, de l'Institut national de France, etc. à Paris, an XI — 1803." XXII und 262 S. 8. Die günstige Aufnahme, die es in den französischen Zeitungen fand, und der Name des Verfassers veranlaßten den Verleger, eine Uebersetzung davon zu veranstalten, und er übertrug es mir, die gegenwärtige Uebersetzung, welche ich nicht selbst gemacht habe, vor dem Drucke zu revidiren, und mit dem Originale zu vergleichen. Ich glaube, dieß, ohngeachtet vie-

ler dringenderen andern Arbeiten, dennoch mit Sorgfalt gethan, und die Uebersetzung so weit verbessert zu haben, als man füglich eines Andern Arbeit umzuändern im Stande ist; auch habe ich verschiedene kleine Unrichtigkeiten des Originals dabey berichtigt, und kann bey der Entfernung des Druckortes nur wünschen, daß nicht neue Druckfehler im Deutschen sich mögen beym Abdruck eingeschlichen haben.

Ueber den eigentlichen Inhalt giebt schon die Vorrede des Verfassers nähere Auskunft, weshalb ich mich einer näheren Angabe desselben, so wie eines Urtheils über den grösseren oder geringeren Werth des Werkes selbst enthalte, der bey der dem Verfasser eignen Behandlungsart nicht ganz und gar verkannt werden wird.

Der Herausgeber.

## Vorrede des Verfassers.

Seit der ersten Herausgabe dieses Buchs, im Jahr 1783, unter dem Titel Essai sur les Machines en général, sind über alle Theile der Mathematik so schöne und viel umfassende Werke erschienen, daß man kaum an das meinige noch denken konnte. Des=

oder m[illegible]ilen streben. Im zweyten Falle denkt man [illegible]h die Bewegung als schon mitgetheilt, als schon bekommen und den Körpern inwohnend; und man forscht bloß den Gesetzen nach, nach welchen die empfangenen Bewegungen sich for[illegible]nzen, und sich bey jeder Veränderung der [illegible]mstände einander modificiren oder auch [illegible]ufheben. Jede von diesen beyden [illegible]n der Mechanik hat ihre Vortheile und [illegible]hre Nachtheile. Der ersten, als der einfa[illegible]sten, ist man beynahe überall gefolgt, aber sie hat den Nachtheil, daß sie sich auf einen dunkeln metaphysischen Begriff, wie der der Kräfte ist, gründet. Denn welche klare Idee kann der Name Ursache dem Geiste bey einem solchen Gegenstande wohl darstellen? Der Arten von Ursachen sind so viele. Und was kann man sich in der bündigen Sprache der Mathematik unter einer *Kraft*, das heißt, unter einer *wirkenden Ursache* denken, die das doppelte oder dreyfache einer andern

äre? Man versteht bey der Rechnung voll-
ommen, was es heißt, zwey Größen der
Bewegung in einem gegebenen Verhältniß;
der in welchem Verhältniß stehen zwey
anz verschiedene Ursachen zu einander?
Sind diese Ursachen der Wille, oder die
hysische Constitution des Menschen, oder
es Thieres, welches durch seine Handlung
ie Bewegung entstehen macht? Aber was
edeutet der Ausdruck, ein Wille, der das
oppelte oder dreyfache eines andern Wil-
ens ist, oder eine physische Constitution,
ie eine doppelt oder dreymal so große Wir-
ung hervorbringen kann, als eine andere?
Der Begriff des Verhältnisses der Kräfte
nter sich, als Ursachen gedacht, ist um
ichts deutlicher, als der der Kräfte selbst.

Wenn man sich zu der Parthey schlägt,
velche die Ursache gar nicht von der Wir-
ung trennt, das heißt, wenn man unter
em Worte Kraft, die Größe der Bewe-

So z. B. macht man im erstern Falle keine Schwierigkeit, als Axiom anzunehmen, daß eine Kraft in jedem beliebigen Punct ihrer Richtung als vorhanden angesehen werden kann: im zweyten aber kann man nicht sagen, daß die Bewegung eines Körpers da existire, wo dieser Körper selbst nicht zugegen ist. Im erstern Fall begreift man, wenn man einmal bey der Dunkelheit des Begriffs des Wortes Kraft vorüber ist, was der Ausdruck bedeutet: mehrere Kräfte wirken in einem und ebendemselben Punct nach verschiedenen Richtungen; im zweyten kann man nicht begreifen, was es heißen solle: Größen der Bewegung, nach verschiedenen Richtungen gehend, und dennoch in einem und demselben Körper beysammen, da ja doch dieser Körper nicht mehrere Wege auf einmal durchlaufen kann; man kann daher diese verschiedenen Bewegungen nicht anders, als in verschiedenen Körpern selbst sich den-

en, die durch ihren Stoß auf einander gezwungen werden, sich anders zu bewegen; und es ist nun das Gesetz dieser Veränderungen aufzusuchen.

Im erstern Fall, wenn man den Begriff der Kräfte einmal zugelassen hat, ist es leicht, die Gesetze der Statik festzusetzen, und von da aus gelangt man, vermittelst des Grundsatzes von Jakob Bernoulli, und d'Alembert zu den Gesetzen der Bewegung; bey dem letztern Falle hingegen muß man mit der Dynamik den Anfang machen, und die Statik bloß als einen besondern Fall der allgemeinen Prinzipien betrachten; den nämlich, wo alle Bewegungen sich vernichten.

Die erste Methode ist daher weit leichter und auch, wie ich eben bemerkt habe, fast allgemein befolgt worden. Dem un

... gleichen Zeiten ungleiche Räume ..., heißt die Bewegung veränderlich ... ungleichförmige Bewegung.

20. Bey der gleichförmigen Bewegung nennt man Geschwindigkeit (17.) das Verhältniß des durchlaufenen Raumes zu der Zeit, die angewendet worden ist, ihn zu durchlaufen, oder den Quotienten des ... durch die zweyte.

21. Weil bey der gleichförmigen Bewegung die in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume einander gleich sind, so folgt daraus, daß der in irgend einer Zeit durchlaufene Raum, dividirt durch die Zeit, immer derselbe ist, das heißt, daß in einer gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit sich gleich bleibt.

22. Wenn die Bewegung ungleichförmig ist, so nimmt man einen unendlich kleinen Zeitraum an, und nennt, für jeden Augenblick, Geschwindigkeit des beweglichen Körpers, das Verhältniß des unendlich kleinen, in diesem Augenblick durchlaufenen Raumes zu der Dauer dieses nämlichen Augenblicks, oder genauer, das letzte Verhältniß dieser beyden Größen zu einander.

23. Wenn die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten immer um gleich viel wächst, so heißt die Bewegung gleichförmig-beschleunigt. Wenn sie im Gegentheil in gleichen Zeiten immer um

viel abnimmt, so heißt sie gleichförmig-
ündert, oder retandirt.

24. Man unterscheidet die Geschwindigkeiten
bsolute und relative. Die absolute Ge-
ndigkeit eines Körpers ist seine reelle und
che Geschwindigkeit; oder diejenige, nach wel-
sich die Größe messen läßt, um welche er sich
Gegenständen, welche als unbeweglich im Raume
ehen werden, nähert oder sich von ihnen ent-
Die relative Geschwindigkeit zweyer Körper
Gegentheil ist diejenige, welche dazu dient,
Größe zu messen, um welche sich diese Körper,
ner gegebenen Zeit, einander nähern, oder
einander entfernen. Es ist uns nicht möglich,
s zu entscheiden, ob die scheinbare Geschwin-
it dieses oder jenes Körpers reell ist, oder
, weil wir nicht wissen, ob wir mit ihm in
inschaftlicher Bewegung fortgerissen werden,
nicht, so wie man lange Zeit geglaubt hat,
die Erde im Raume fest stände, weil man
dem äußerlichen Scheine urtheilte; und man
viel Mühe gehabt, um von diesem Irrthume
k zu kommen.

25. Die gerade Linie, oder die Tangente am
ngspuncte der krummen Linie, welche ein Kör-
der in Bewegung ist, in jedem Augenblick
reibt, heißt Richtung seiner Geschwin-
keit.]

Sie ist nichts anders, als das Product dieser durch die Masse des Körpers. So ist, wie die Geschwindigkeit eines beweglichen Körpers in mehrere einzelne Geschwindigkeiten zerlegt wurde, das Product von jeder dieser einzelnen oder zusammensetzenden Geschwindigkeiten durch die Masse des Körpers eine partielle Bewegungsgröße, und die Totalgeschwindigkeit, oder die resultirende, multiplicirt durch dieselbe Masse, ist die Totalbewegungsgröße, oder die resultirende Größe der Bewegung von allen diesen einzelnen Bewegungsgrößen.

37. Die Idee von der Größe der Bewegung stützt sich auf eine sehr einfache Erfahrung. Nämlich darauf, daß, wenn zwey vollkommen harte Körper, z. B. zwey Kugeln, von gleichen Massen, gegen einander mit direct entgegengesetzten, und gleichen Geschwindigkeiten zusammenstoßen, sie sich nicht allein plötzlich, im Augenblick des Stoßes, einander zum Stillstand bringen, sondern auch, daß, wenn man die Masse des einen verdoppelt, verdreyfacht, vervierfacht rc. während daß man die Geschwindigkeit des andern ebenfalls zwey- drey- oder vierfach rc. nimmt, die Bewegung gleichfalls aufgehoben wird; und diese allgemeine und gänzliche Aufhebung aller Bewegungen ist das, was man Gleichgewicht nennt (15.).

38. Es geht also aus dieser Erfahrung hervor, daß unter diesen harten Körpern ein Gleichgewicht allemal dann Statt finden wird, wenn

re Massen sich umgekehrt verhalten, wie ihre Ge-
)windigkeiten; oder, welches auf dasselbe hinaus-
uft, wenn die Producte von jeder Masse durch
re Geschwindigkeit einander gleich sind.

Nun aber sieht man wohl ein, daß in der
Rechanik dergleichen Gegenstände häufig in Erwä-
ung zu ziehen seyn müssen, und daß folglich das
roduct der Masse eines Körpers durch seine Ge-
hwindigkeit eine Art von Größe ist, deren Gebrauch
ihr häufig vorkommen muß. Dieß ist der Grund,
arum man ihr einen besondern Nahmen, den Nah-
ien Größe der Bewegung gegeben hat.

39. Das, was wir eben Größe der Be-
egung genannt haben, heißt auch Kraft des
Stoßes. Diese letzte Benennung hat sie davon,
eil wirklich von ihr die Intensität des Stoßes,
der die Erschütterung herrühret. Also beziehet sich
er Ausdruck, Größe der Bewegung, eigentlich
uf die Körper, sofern sie sich wirklich bewegen,
nd der, Kraft des Stoßes, auf die Körper, in
em Momente ihres Stoßens auf andere gedacht.
Größe der Bewegung heißt sie in so fern, als sie
n dem Körper sich befindet, oder als sie wirklich
[illegible], vor dem Stoße, [illegible], und Kraft des
Stoßes in so fern, als sie durch den [illegible] [illegible]
[illegible] wird.

40. Die Größen der Bewegung [illegible] [illegible]
[illegible], wie die Geschwindigkeiten, [illegible] [illegible] [illegible]



Und hiernach erhält man für [illegible]
[illegible] ähnliche Gleichungen, [illegible]
h M multiplicirt.

[illegible]on den beschleunigenden [illegible]
und den [illegible]

44. Eine beschleunig[illegible]
[illegible]rnde Kraft [illegible]
[illegible]ment einer Geschwindigkeit [illegible]

Wenn die Geschwindigkeit [illegible]
[illegible]örpers in einem fortwäh[illegible],
[illegible]chleunigt, und, wenn [illegible]
[illegible]indert wird, verzögert, [illegible]
[illegible]ewegung.

45. Wenn bey der bew[illegible]
[illegible]r Körper immer, in glei[illegible]
[illegible]rade an Geschwindigkeit [illegible]
[illegible]e Bewegung gleichförmig[illegible]
[illegible]eil nennt man sie gleich[illegible]
[illegible]r bewegliche Körper, [illegible]
[illegible]leiche Grade von Gesch[illegible]

Bey der gleichförmig[illegible]
[illegible]nnt man die beschle[illegible]
[illegible]en Körpers, die G[illegible]
[illegible]nem gegebenen Zeit[illegible]

he sie befolgt, und der Wirkungen, welche sie orbringt, machten den Hauptgegenstand der erblichen Arbeiten Neutons, und derjenigen aus, seinen Fußstapfen gefolgt sind.

Alle diese Kräfte nun sind in Beziehung auf s, was wir Gewicht genannt haben, das, was Allgemeinen bewegende Kräfte heißen; d jede bewegende Kraft ist das Product einer asse durch eine beschleunigende oder verzögernde raft, die mit der Schwere oder der Schwerkraft rglichen werden kann, und da diese beschleuni- ende Kraft selbst (48.) nichts anders ist, als s Verhältniß der Zunahme der Geschwindigkeit, ährend einer unendlich kurzen Zeit, zu diesem eitelemente, so folgt daraus, daß eine jede bewe- nde Kraft, das Product einer Masse durch eine eschwindigkeit, dividirt durch einen Zeitraum, , wie wir oben gesagt haben (17.).

50. Die Schwere, und alle Kräfte der Art, irken in unbemerkbaren Graden, und bringen keine ewaltsame Veränderung hervor. Dem ungeachtet heint es ziemlich natürlich zu seyn, sie sich vor- ustellen, als ob sie in unendlich kleinen Zeiträu- nen ebenfalls unendlich kleine Stöße den bewegli- hen Körpern, welche sie in Bewegung setzen, mit- heilte. Und von nun an wird das Product einer eden bewegenden Kraft, multiplicirt durch das Element der Zeit, während dessen sie auf den, in Betrachtung gezognen Körper wirkt, als eine un-

[illegible]

[illegible]

[illegible] Druck in [illegible]
[illegible] Kraft ausdrücken [illegible].

[illegible] Kraft, nach irgend einer [illegible] einer Richtung hin [illegible]

bey den Geschwindigkeiten (26.), das Pro-
dieser bewegenden Kraft durch den Cosinus
Winkels, den jene Richtung mit der Richtung
ser bewegenden Kraft macht; das heißt, die
ducirte Kraft ist das Product der gegebenen
aft selbst durch den Cosinus des Projections-
nkels.

52. Wenn dieser Winkel spitz ist, so heißt
se Kraft, in Bezug auf die gegebene gerade Li-
, sollicitirend; weil es in der That offen-
r ist, daß sie in der Richtung dieser geraden
ie zu bewegen strebt; aber wenn der Winkel
mpf ist, so heißt die Kraft widerstrebend,
il sie wirklich in einer, der sollicitirenden Kraft,
tgegengesetzten Richtung zu bewegen strebt. Es
klar, daß ein Nullwinkel für spitz, und einer,
r der halben Circumferenz gleich ist, für stumpf
gesehen wird.

Wenn z. B. ein Mensch ein Gewicht mit Hülfe
es Hebels, einer Rolle, einer Schraube u. s. w.
porhebt, so ist es offenbar, daß die Schwere
d die Geschwindigkeit des Gewichts, oder der
eg, den es beschreibt, nothwendig unter sich ei-
n stumpfen Winkel bilden müssen; sonst würde
genscheinlich das Gewicht, anstatt empor zu stei-
n, heruntergehen: aber die bewegende Kraft und
re Geschwindigkeit bilden einen spitzen Winkel;
d so wird, nach unsrer Definition, das Gewicht

ie schon vorhandene Bewegung, und ihr Gegen-
tand ist einzig und allein die Untersuchung, wie
iese einmal mitgetheilte Bewegung sich erhält, sich
ortpflanzt, oder sich modifirt, abstrahirt von allen
euen fremdartigen Einflüssen, das heißt, sie be-
echnet nie die innere Kraft oder das Vermögen
es Bewegenden, sondern einzig die wirkliche Kraft,
elche er verbreitet, und welche wir eben bewe-
ende Kraft genannt haben.

55. Man nennt lebendige Kraft eines
Körpers das Product seiner Masse durch das Qua-
rat seiner Geschwindigkeit; was aber zur Betrach-
ung dieser neuen Art von Größe hat Gelegenheit
eben können, ist Folgendes:

Die Erfahrung beweist, wie eben bemerkt wor-
en ist, daß die Menschen, die Thiere, und an-
ere wirkende Körper dieser Art, Kräfte ausüben
önnen, die sich mit denen der Gewichte vergleichen
assen, sey es nun in Rücksicht ihrer eigenen Ge-
wichte selbst, oder in Rücksicht der freywilligen An-
strengungen, deren sie fähig sind. Nun aber bie-
en sich zwey Arten, die Wirksamkeit, die sie wirk-
ich ausüben, zu schätzen, dar, wovon eine eben
o natürlich ist, als die andere. Die eine besteht
arinn, daß man darauf sieht, welche Last ein
Mensch z. B. tragen kann, oder welche Gewalt,
n Gewicht geschätzt, er tragen kann, wenn alles
m Zustande der Ruhe bleibt. Dann ist die Stärke
ieses Menschen eine Kraft des Drucks, die diesem

oder jenem Gewichte gleich ist, und die man bisweilen todte Kraft nennt (47.).

56. Die zweyte Art, die Stärke eines Menschen, eines Pferdes u. s. w. zu schätzen, ist die, daß man die Arbeit in Betracht zieht, welche er in einer gegebenen Zeit, z. B. in einem Tage, durch anhaltende Thätigkeit zu vollführen im Stande ist. Um, wie im ersten Fall, auch bey diesem Gesichtspuncte zu einer genauen Schätzung zu gelangen, können wir wieder das Resultat seiner Arbeit mit der Wirkung des Gewichts vergleichen; denn es ist natürlich, diese Arbeit nach Gewichten, welche er in einer gegebenen Zeit emporheben kann, und nach der Höhe, zu welcher er es hinaufhebt, zu schätzen. Eben auf dieß achtet man auch, wenn man sagt, daß ein Pferd, in Rücksicht seiner Kraft, sieben Menschen gleich ist: man will nicht sagen, daß, wenn sieben Menschen auf einer Seite zögen, und das Pferd auf der andern, Gleichgewicht Statt finden würde; sondern, daß ein Pferd z. B. durch anhaltende Thätigkeit, für sich allein so viel Wasser aus der Tiefe eines Brunnens zu einer gegebenen Höhe emporziehen wird, als die sieben Menschen zusammen in der nämlichen Zeit. Wenn man Arbeiter braucht, so liegt es weit mehr daran, zu wissen, wie viel Arbeit von einer solchen Art, wie der, von der wir eben gesprochen haben, sie verrichten können, als die Lasten zu wissen, welche sie, ohne sich vom Platze zu rühren, tragen können. Diese neue Art, die Kräfte zu be-

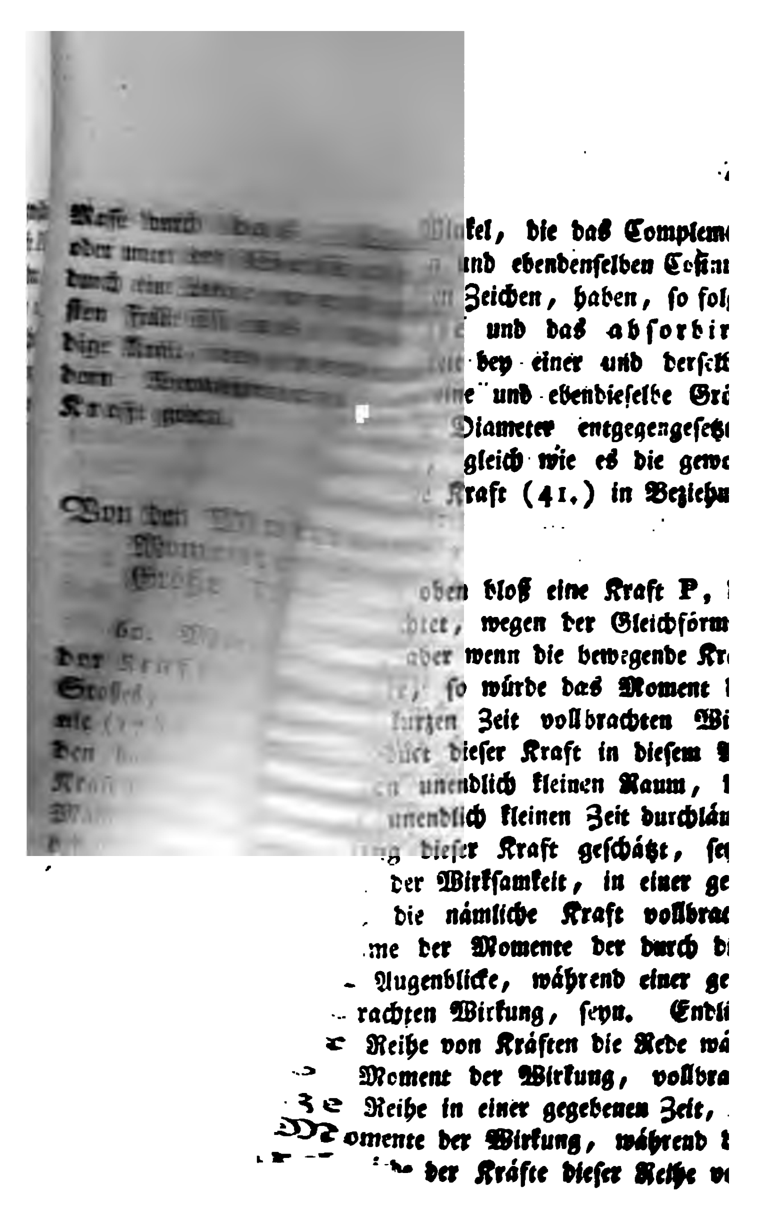
trachten, ist folglich wenigstens eben so natürlich, und eben so wichtig als die erste. Und da offenbar ein Gewicht von 200 Pfund 3000 Pariser Fuß hoch zu heben, bey dieser Art die Kräfte zu schätzen, das nämliche ist, als 400 Pfund bloß 1500 Pariser Fuß hoch zu heben; so müssen dem zufolge aus diesem neuen Gesichtspuncte die Kräfte im geradem Verhältnisse der Gewichte, die zu heben sind, und der Höhen, zu welchen sie gehoben werden sollen, betrachtet werden; und eben so auch andere Arbeiten, die sich mit diesen vergleichen lassen. Hierauf ist der Begriff der lebendigen Kräfte gegründet.

57. M sey eine Masse, P ihr Gewicht, G die Schwerkraft, dt das Zeitelement, und H die Höhe, zu welcher P gehoben worden ist; nach dieser neuen Art, die Kräfte zu betrachten, wird diejenige, die angewendet werden mußte, um P zur Höhe H zu erheben, PH seyn; aber [illegible] da H ein durchlaufener Raum ist, so kann er auch das Product einer Geschwindigkeit V, mit einer Zeit T ausgedrückt werden; mit der andern Seite hat man (48.) P = G M = [illegible] M und [illegible] ist eine Geschwindigkeit V [illegible] folglich ist PH = MVV [illegible], folglich, da [illegible] zwey homogene Größen sind, so wird [illegible] das Product einer Masse durch das [illegible] Geschwindigkeiten, oder durch das [illegible]

mittlern Proportional=Geschwindi
und $V^1$ seyn; folglich löst sich d
ein Product einer Masse, durch d
Geschwindigkeit auf, wie M u
mittlere Proportional=Geschwindi
und $V^1$ ist. Dieß ist der natür
Begriffs der lebendigen Kräfte.
große Untersuchungen über die G
zu wissen, ob die Kräfte der
nach dem Product der Masse du
digkeit, oder nach dem Product
das Quadrat der Geschwindigkeit
müssen. Dieses läuft, wie man
Wortstreit hinaus; denn wenn m
einmal angenommenen Definitionen
so werden die Schlüsse immer die
man immer von denselben Gründ

58. Unter den bloßen Name
Gewalt, oder eigentlich sog
te, versteht man die Größe de
die treibenden Kräfte, oder, wer
Kräfte des Stoßes und des D
den nämlichen Zerlegungen und d
setzen unterworfen sind. Wenn m
bendige Kraft bezeichnen will, so
zeit ihr charakteristisches Beywort
das Wort lebendig.

59. Wir haben eben gesehen
dige Kraft entweder unter der Ges



...kel, die das Complem...
...und ebendenselben Co...
...Zeichen, haben, so fol...
...und das absorbir...
...bey einer und dersel...
...e und ebendieselbe Grö...
Diameter entgegengesetz...
gleich wie es die gew...
Kraft (41.) in Beziehu...

...oben bloß eine Kraft P, ...
...tet, wegen der Gleichförm...
...aber wenn die bewegende Kr...
..., so würde das Moment ...
...kurzen Zeit vollbrachten Wi...
...dieser Kraft in diesem ...
...unendlich kleinen Raum, ...
unendlich kleinen Zeit durchläu...
...dieser Kraft geschätzt, se...
der Wirksamkeit, in einer ge...
die nämliche Kraft vollbra...
...me der Momente der durch d...
Augenblicke, während einer ge...
...rachten Wirkung, seyn. Endli...
Reihe von Kräften die Rede wä...
Moment der Wirkung, vollbra...
Reihe in einer gegebenen Zeit, ...
...omente der Wirkung, während ...
...der Kräfte dieser Reihe v...

84. Es scheint folglich gewiß zu seyn, daß
berhaupt allemal, wenn ein Körper einem an-
rn Bewegung mittheilt, er seinerseits eine
eiche Größe davon nach der entgegengesetzten
ichtung empfängt, wenigstens in so weit, als
r Stoß in gerader Richtung und bloß zwischen
ey Körpern vor sich geht. Aber die Analogie
hrt uns auf den Gedanken, daß das näm-
he Statt finden muß, es mögen der Körper so
el, und die Richtungen ihrer Bewegungen seyn,
lche sie wollen; und alle Phänomene der Na-
r bestätigen dieses wichtige Gesetz, welches man
wöhnlich mit den Worten ausdrückt: die Gegen-
rkung ist jederzeit der Wirkung gleich und ent-
gengesetzt.

Dieses Gesetz, wie Maclaurin sehr gut be-
erkt hat, ist gewissermaßen nichts anders, als
r allgemeiner Ausdruck des Gesetzes der Träg-
it, das von der ersten, oben angegebenen Hy-
these an beybehalten worden ist; das heißt,
ch dem Ausdrucke dieses berühmten Mathemati-
rs: „es kann nicht allein ein isolirter Körper
inen Zustand niemals von selbst verändern, son-
rn auch, wenn mehrere Körper da sind, die
if einander einwirken, so bekommt der eine keine
ue Kraft, die nicht ein anderer, nach der näm-
chen Richtung verlöre; woraus folgt, daß, ob
leich die Bewegung durch den Stoß, aus einem
ı den andern übergeht, gleichwohl die Summe
er Größen ihrer Bewegung, nach einer gegebenen

Richtung geschätzt, jederzeit dieselbe ist, und daß sie durch die Wirkungen dieser Körper auf einander nicht verändert werden kann. Also dient dieses Gesetz der Gleichheit, zwischen der Wirkung und Gegenwirkung dazu, das Gesetz der Trägheit allgemeiner darzustellen, und es auf jede Anzahl von Körpern auszudehnen. Denn so wie nach dem letzteren ein Körper so lange in dem Zustande der Ruhe, oder der gleichförmigen Bewegung in einer geraden Linie verharrt, bis er von einer äußern Ursache afficirt wird: eben so bleibt, nach dem Gesetz der Gleichheit zwischen der Wirkung und Gegenwirkung, die Summe der Größen der Bewegung irgend einer Anzahl von Körpern, nach einer gegebenen Richtung geschätzt, dieselbe, ungeachtet der Stöße und der wechselseitigen Wirkung der einzelnen Körper auf einander, bis irgend ein äußerer Einfluß sie stört".

85. So verwickelt auch dieß System seyn mag, und selbst, wenn die Bewegung aus einem Körper in den andern durch eine Maschiene, oder durch eine Reihe von Mittelskörpern fortgepflanzt würde, so wird sich die Wirkung und Gegenwirkung aller Theile des Systems nichts desto weniger in ein System von einzelnen Wirkungen und Gegenwirkungen auflösen, deren zwey und zwey gleich und geradezu entgegengesetzt sind; denn alsdann geht die Wirkung, die zwischen den entferntern Körpern ausgeübt wird, aus einem in den andern durch unmittelbare Wirkung zwischen je zwey und zwey

an einander stoßenden Körpern auf einander, über.

86. Aus dem allen, was wir eben gesagt haben, geht hervor, daß die Größe der Bewegung, die irgend ein Körper gewinnt, die resultirende Bewegungsgröße der einzelnen Größen der Bewegungen ist, die angesehen werden, als ihm durch alle übrigen Körper des Systems mitgetheilt; und daß die verlohrne Größe der Bewegung das Resultat von allen denen ist, die man, als jedem der übrigen Körper von ihm mitgetheilt, betrachtet.

Folglich ist die resultirende Kraft aller der Kräfte, welche er mittheilt, jederzeit der resultirenden aller derer, welche er erhält, gleich und geradezu entgegengesetzt.

87. Dieses Gesetz gilt nicht bloß für harte Körper, sondern für Körper aller Art. Die Elasticität kann die Größe der Bewegung, welche sich die Körper gegenseitig mittheilen, vermehren. Aber weil sie, mit derselben Energie nach beyden einander entgegengesetzten Richtungen sich innerlich spannen und wieder nachlassen; so bleibt die Totalsumme nach jeder Richtung dieselbe. Genug, sagt Maclaurin: „wir kennen bey keinem Körper eine andere Art, wie er seine Kraft verliehre, als wenn er sie einem andern mittheilt.“

88. Es kann anfänglich scheinen, daß dieß

Gesetz in dem Falle, wo es fixe Puncte in dem Systeme giebt, eine Ausnahme erleiden muß; aber es ist Thatsache, daß es in der Natur keinen wahrhaft festen und unbeweglichen Punct wirklich giebt. Die Puncte, die man zur Erleichterung der Rechnungen als feste annimmt, sind bloß sehr beträchtliche Massen, die man im Verhältniß der andern Körper des Systems als unendlich groß ansieht. So ist der Unterstützungspunct, auf dem sich ein Hebel bewegt, an die Erdkugel fest geschlossen; man hält ihn nur für eins mit derselben: er scheint fest und ist es nicht, und die Größen der Bewegung, welche die an diesem Hebel aufgehangenen Körper verlieren, gewinnt die Erdkugel selbst, wo sie unmerklich und unschätzbar für uns werden; darum sehen wir diesen Unterstützungspunct als wirklich fest und fähig an, die ihm mitgetheilten Kräfte zu vernichten, und man muß in der Mechanik auf diese Kräfte so rechnen, als ob sie wirklich von dieser beständigen Gleichheit zwischen der Wirkung und Gegenwirkung in entgegengesetzter Richtung, eine Ausnahme machten.

89. Ueber die fünfte Hypothese. Die Erfahrung lehrt, daß, wenn mehrere Körper auf einander einwirken, und das ganze System mit einer gemeinschaftlichen Bewegung, nach irgend einer Richtung fortgerissen wird, z. B. wenn eine Tafel, wie die eines Billiards, auf ein schwimmendes Schiff gesetzt wird, die Resultate, die nämlichen, wie oben sind; das heißt, die Kör-

per werden sich einer in Rücksicht auf den andern eben so verhalten, als wenn die Tafel fest und unbeweglich wäre.

In der That, es scheint ganz einfach, daß die Intensität des Stoßes zwischen zwey Körpern nicht von ihrer gemeinschaftlichen Bewegung abhängt, sondern einzig und allein von der Schnelligkeit, mit der sie sich einander zu nähern streben; sie stoßen und ziehen sich bloß, weil sie von Bewegungen getrieben werden, die mit einander unvereinbar sind. Man sieht folglich nicht ein, warum diese Bewegungen sich noch weiter einander verändern sollten, als so weit, als nothwendig ist, damit die Körper aufhören, einander sich Gewalt anzuthun, und ihre Bewegungen aufhören, unverträglich zu seyn; das heißt, die Größen der Bewegung, welche sich Körper, die durch Stoß oder Druck auf einander einwirken, einander mittheilen, hängen, der fünften Hypothese gemäß, nicht von ihren absoluten, sondern einzig und allein von ihren relativen Geschwindigkeiten ab.

Was den zweyten Theil der Hypothese anbetrifft, wo von der Wirkung die Rede ist, welche zwey, durch andere getrennte, Körper auf einander durch Stoß, Druck oder Zug ausüben: so lehrt die Erfahrung, daß die Wirkung nicht nach der geraden Linie, welche sie verbindet, fortgeht, wie bey denjenigen, die unmittelbar auf einander einwirken; sondern daß sie erst von diesen in die zu-

Stoße hatten; und dieß ist der siebenden Hypothese
emäß.

Die angeführten Hypothesen sind also auf die
vahrscheinlichste Weise durch Thatsachen und durch
Vernunftschlüsse gerechtfertiget; und wir können
e daher als die wahrhaften Gesetze der Natur
nsehen und es erwarten, ob neue Phänomene sie
estätigen, oder sie umstoßen.

Verschiedene Folgerungen aus den vorhergegangenen Hypothesen. Was nennt man Kraft der Trägheit? Eigenschaften der Kräfte, die in einen Punct zusammenlaufen: Parallelkräfte und Mittelpunct der Schwere.

92. **Ueber die Kraft der Trägheit.**
ufolge der ersten Hypothese beharrt jeder Körper
 seinem Zustande der Ruhe, oder der gleichför-
igen und geradlinigten Bewegung, bis er durch
ie Wirkung eines andern Körpers daraus vertrie-
en wird; sobald dieser andere Körper den erstern
ifft, so nimmt jeder dieser Körper eine neue
röße der Bewegung an, welches die resultirende
on derjenigen, welche er vorher hatte, und der-
nigen, welche er gewinnt, ist; und es versteht
ch, daß die Größe der Bewegung, welche er
ewinnt, ihm durch den andern Körper mitgetheilt
orden [illegible] bekommt der erste der obigen

ur in Bezug auf die wirklichen Bewegungen, wel-
he es schon vor der Wirkung der bewegenden
raft erlangt hatte. „Ich muß bemerken", sagt
uler, im 66sten seiner Briefe an eine
eutsche Prinzessin, „daß man sehr un-
bicklich diejenige Eigenschaft der Körper, vermöge
elcher sie in ihrem Zustande bleiben, Kraft
ennt. Denn, wenn man unter dem Worte
Kraft alles dasjenige versteht, was fähig ist,
en Zustand der Körper zu verändern, so ist die
Eigenschaft, vermöge welcher sie sich in dem Ih-
igen erhalten, vielmehr das Entgegengesetzte einer
Kraft. Es ist folglich ein Mißbrauch, daß ei-
nige Schriftsteller der Trägheit, welche eben jene
Eigenschaft ist, den Namen Kraft geben, und daß
lle sie Kraft der Trägheit nennen. Dieser
Mißbrauch kann zu sehr groben Fehlern führen".

Diese Bemerkung von Euler ist auffallend; allein diese Fehler sind leicht zu vermindern, wenn man das, was man schlechthin Trägheit nennt, von der Kraft der Trägheit unterscheidet. Die Trägheit ist bloß eine Eigenschaft, die nicht berechnet werden kann, aber die Kraft der Trägheit ist eine wahre Größe, die einer genauern Schätzung fähig ist. Die Trägheit ist schlechthin die Eigenschaft jedes Körpers, in seinem Zustande der Ruhe oder seiner gleichförmigen und geradlinigen Bewegung zu bleiben, und die Kraft der Träg-
it (94.) ist die Größe der Bewegung, welche
Körper jedem andern mittheilt, der ihn aus

diesem Zustande herausreißen will. Die Kraft der Trägheit hat folglich sehr richtig den Charakter dessen, was man überhaupt Kraft nennt, das heißt, alles dessen, was den Zustand der Ruhe oder der Bewegung der Körper verändert. Denn weil sie eine mitgetheilte Bewegungsgröße ist, so verändert sie nothwendig den Zustand des Körpers, dem sie eingedrückt wird; und was den Zustand des Körpers, der sie ihm eindrückt, betrifft, so wird auch er zugleich verändert, allein dieß geschieht durch die Gegenwirkung des andern Körpers, die ihrerseits wiederum nichts anders, als die Kraft der Trägheit dieses andern Körpers ist. Also wird der Zustand dieser beyden Körper, die sich einander stoßen, bey jedem durch die Kraft der Trägheit des andern verändert; und er selbst drückt diesem eine gleiche Größe von Bewegung, nach entgegengesetzter Richtung durch seine eigene Trägheit ein.

99. Wir wollen $dt$ das Zeitelement, oder den unendlich kurzen Zeitraum nennen, während dessen man sich die Wirkung der bewegenden Kraft, und die der Kraft der Trägheit denken kann; $M$ die Masse des Körpers, $Mp$ die bewegende Kraft, $Mq$ die Kraft der Trägheit, und folglich $Mpdt$, $Mqdt$ ihre Wirkungen, das heißt, die Größen der Bewegung, die sie beyderseits in $M$ während $dt$ erregen würden. Die während $dt$ verlohrne Bewegungsgröße wird folglich die resultirende von $Mpdt$ und $Mqdt$ seyn.

Es sey V die Geschwindigkeit des Körpers in einem gegebenen Augenblick, d V ihr Zuwachs, während d t, z der Winkel, welchen diese Geschwindigkeit V und die beschleunigende Kraft p mit einander machen. So wird folglich die bewegende Kraft M p, geschätzt nach der Richtung V, M p cos. z seyn, und folglich wird die nach dieser Richtung während d t eingedrückte Bewegungsgröße M p d t cos. z seyn.

Anderntheils wird die Bewegungsgröße M V während d t nach der Richtung V um die Größe M d V zunehmen; folglich wird — M d V das seyn, was wir die Wirkung der Kraft der Trägheit genannt haben, ebenfalls nach der Richtung von V geschätzt, folglich ist M p d t cos. z — M d V die resultirende von diesen beyden Kräften, jede nach der Richtung V geschätzt; folglich ist dieß die von M während d t verlohrne Bewegungsgröße, nach der Richtung von V geschätzt. Diese verlohrne Bewegungsgröße aber ist die Wirkung der von M ausgeübten Kraft des Druckes, multiplicirt durch die Zeit d t, während welcher sie ausgeübt wird. Folglich ist in jedem Augenblick diese ausgeübte Kraft, nach der Geschwindigkeit V des beweglichen Körpers geschätzt,

$$M p \cos. z - M \frac{dV}{dt}$$

100. Wenn man das System irgend eine an-

dere Bewegung annehmen liesse, so daß dann w die neue Geschwindigkeit von M ausdrückte, x den von dieser neuen Geschwindigkeit und der beschleunigenden Kraft p, und y den von den beyden Geschwindigkeiten V und u eingeschloßnen Winkel: so ist klar, daß M p cos. x die bewegende Kraft, nach der Richtung dieser neuen Geschwindigkeit u geschätzt, und V cos. y die erstere Geschwindigkeit nach der Richtung der zweyten geschätz, seyn würde: daß folglich d (V cos. y) die Zunahme dieser Geschwindigkeit, nach der Richtung von u geschätzt, seyn würde. Mithin würde $-\, M \frac{d\,(V \cos.\, y)}{d\,t}$ die Kraft der Trägheit, nach derselben Richtung von u geschätzt, seyn; und die Kraft des Druckes, welchen M in jedem Augenblicke ausübt, nach der Richtung von u geschätzt, würde mithin seyn

$$M\,p \cos.\, x - M \frac{d\,(V \cos.\, y)}{d\,t}$$

101. **Ueber die Kräfte, die in einem und ebendemselben Punct zusammenkommen.** Wir wollen uns irgend ein System von Kräften $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, (Fig. 12.) an einem und demselben Puncte M angebracht, denken, von deren $\overline{MK}$ die resultirende seyn mag. Durch den Punct M wollen wir irgend eine gerade unbestimmte Linie $\overline{MF}$ ziehen, und auf die-

ser willkührlich einen Punct F annehmen. Von den Puncten A, B, C, K wollen wir Perpendikulärlinien $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$, $\overline{Kk}$ auf $\overline{MF}$ fällen, und aus dem Puncte F Perpendikulärlinien $\overline{Fa'}$, $\overline{Fb'}$, $\overline{Fc'}$, $\overline{Fk'}$ auf die Richtungen der Kräfte. Dieß angenommen, werden die ähnlichen Dreyecke MAa, und MFa' geben:

$$\overline{MA} : \overline{Ma} :: \overline{MF}, \overline{Ma'} \text{ oder}$$
$$\overline{MA} \cdot \overline{Ma'} = \overline{MF} \cdot \overline{Ma}$$

aus demselben Grunde wird man haben

$$\overline{MB} \cdot \overline{Mb'} = \overline{MF} \cdot \overline{Mb}$$
$$\overline{MC} \cdot \overline{Mc'} = \overline{MF} \cdot \overline{Mc}$$
$$- \overline{MK} \cdot \overline{Mk'} = - \overline{MF} \cdot \overline{Mk}$$

Wenn man alle diese Gleichungen zusammennimmt, so wird, da das letzte Glied der Totalgleichung sich auf o reducirt, weil $\overline{Mk} = \overline{Ma} + \overline{Mb} + \overline{Mc}$, herauskommen:

$$\overline{MA} \cdot \overline{Ma'} + \overline{MB} \cdot \overline{Mb'} + \overline{MC} \cdot \overline{Mc'} = \overline{MK} \cdot \overline{Mk'}.$$

das heißt, die Summe der Producte, jeder der verbundenen Kräfte, multiplicirt durch den Abstand $\overline{MF}$ des Punctes, in welchem die Kräfte zusammentreffen, von irgend einem Puncte F im

Raume, geschätzt nach der Richtung dieser Kraft, ist gleich der resultirenden Kraft, ebenfalls mit der Entfernung $\overline{MF}$ multiplicirt, und nach der Richtung dieser Kraft geschätzt.

Wenn die resultirende Kraft MK = o wäre, so würden die übrigen Kräfte sich wechselseitig im Gleichgewicht halten; folglich ist in dem Falle, wenn mehrere nach einem und ebendemselben Puncte gerichtete Kräfte sich einander im Gleichgewicht halten, die Summe der Producte aus jeder von diesen Kräften in den Abstand des Vereinigungspunctes von irgend einem beliebig in dem Raume angenommenen Puncte, nach der Richtung dieser Kraft geschätzt, gleich o.

102. Dieselben ähnlichen Dreyecke MAa, MFa', welche wir oben betrachtet haben, geben auch

$$\overline{MA} : \overline{Aa} :: \overline{MF} : \overline{Fa'} \text{ oder}$$
$$\overline{MA} \cdot \overline{Fa'} = \overline{MF} \cdot \overline{Aa}$$

und aus demselben Grunde erhält man

$$\overline{MB} \cdot \overline{Fb'} = \overline{MF} \cdot \overline{Bb}$$
$$-\overline{MC} \cdot \overline{Fc'} = \overline{MF} \cdot \overline{Cc}$$
$$-\overline{MK} \cdot \overline{Fk'} = -\overline{MF} \cdot \overline{Kk}.$$

Wenn man alle diese Gleichungen zusammennimmt, so hat man: $\overline{MA} \cdot \overline{Fa'} + \overline{MB} \cdot \overline{Fb'} - \overline{MC} \cdot \overline{Fc'} - \overline{MK} \cdot \overline{Fk'} = \overline{MF} \, (\overline{Aa} + \overline{Bb} - \overline{Cc} - \overline{Kk})$.

103. Wenn alle diese Kräfte in einer und ebenderselben Ebene lägen, so würde sich der zweyte Factor des letzten Gliedes auf Null reduciren (27.); man bekäme folglich $\overline{MA} \cdot \overline{Fa'} + \overline{MB} \cdot \overline{Fb'} - \overline{MC} \cdot \overline{Fc'} = \overline{MK} \cdot \overline{Fk'}$. Das heißt: die Summe der Momente der gegebenen Kräfte, in Rücksicht irgend eines in der Ebene dieser Kräfte angenommenen Punctes F, und zwar diejenigen, welche so, wie MC, eine Bewegung nach der nämlichen Richtung, wie die resultirende, um diesen Punct herum zu bewirken streben, negativ genommen, würde gleich seyn dem Momente dieser resultirenden Kraft, in Rücksicht des nämlichen Punktes.

104. Wenn die Kräfte in verschiedenen Ebenen liegen, und man das ganze System für irgend eine Ebene verzeichnet und den Punct F als die Projection einer geraden Linie, oder einer Axe, die auf dieser Ebene senkrecht steht, betrachtet; so wird man durch das nämliche Raisonnement folgern, daß das Moment der resultirenden Kraft, in Bezug auf diese Axe, gleich ist der Summe

der Momente der zusammensetzenden Kräfte, in Bezug auf die nämliche Axe.

105. Wenn die resultirende Kraft 0 ist, so halten sich die gegebenen Kräfte gegenseitig im Gleichgewicht, folglich:

**ist in jedem Systeme von Kräften, die sich um irgend einen gegebenen Punct herum im Gleichgewicht befinden, die Summe der Momente der Kräfte, in Bezug auf irgend eine in dem Raume gezogne Axe, gleich Null, indem man diejenigen von diesen Kräften, welche nach der einen Richtung zu drehen streben, positiv, und die, welche nach der entgegengesetzten Richtung hin drehen wollen, negativ nimmt.**

106. Was wir so eben über die Kräfte, die in einem und ebendemselben Puncte zusammen laufen, gesagt haben, gilt eben so wohl für jedes andere System von Kräften, die sich im Gleichgewicht befinden, weil jede von ihnen, zufolge der zweyten Hypothese, derjenigen, die aus allen andern resultirt, gleich und gerade zu entgegengesetzt ist; dieß führt alle mögliche Fälle auf den zurück, wo alle Kräfte in einem und ebendemselben Puncte zusammenlaufen.

107. Ueber die parallelen Kräfte.
Parallelkräfte können als in einem und ebendemselben unendlich weit entfernten Puncte zusammenlaufend gedacht werden. Daraus folgt augenscheinlich: 1) daß die aus mehreren Parallelkräften resultirende Kraft gleich ist der Summe derselben, diejenigen, welche eine dieser resultirenden entgegengesetzte Richtung haben, als negativ angesehen; 2) daß die Summe der Momente aller dieser Parallelkräfte, in Rücksicht auf irgend eine in dem Raume angenommne Axe, gleich ist dem Momente der resultirenden Kraft, in Rücksicht auf dieselbe Axe, wiederum diejenigen unter diesen Kräften, welche eine Bewegung um diese Axe herum, nach einer dieser resultirenden entgegengesetzten Richtung, zu bewirken streben, als negativ angenommen.

So z. B. wenn das System sich auf zwey Parallelkräfte $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$ reducirte, die an de[illegible] beyden Enden eines Hebels angebracht und u[illegible] einen festen Punkt K herum im Gleichgewicht w[illegible] ren, so würde die aus diesen beyden Kräften [illegible] sultirende, welche jederzeit derjenigen, die [illegible] beyden verbundenen Kräfte im Gleichgewicht [illegible] gleich und entgegengesetzt ist, nothwendig [illegible] den festen Punct K gehen; und wenn da[illegible] ment dieser resultirenden, in Rücksicht die[illegible] ctes K, Null wäre, so müßten die b[illegible] mente $\overline{Aa} \cdot \overline{KA}$ und $\overline{Bb} \cdot \overline{KB}$ [illegible]

109. Das, was wir so eben bloß von zwey an dem Hebel angebrachten Parallelkräften gesagt haben, [illegible]reckt sich augenscheinlich auf jede beliebige S[illegible] von Parallelkräften, die um denselben Hebel [illegible]eichgewicht sind. Denn da die resultirend[illegible] allen diesen Kräften inwendig durch den [illegible]; so wird ihr Moment, [illegible] fixen Punct, Null seyn, und folgli[illegible] man alle Momente auf diesen fixen [illegible]t, die Summe der Momente von derjen[illegible] Kräfte, die diesen Hebel nach der ein[illegible]g zu drehen streben, der Summe der Momente von denjenigen Kräften, die ihn nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen streben, gleich seyn.

110. Wir wollen uns mehrere Körper A, B, C, D u. s. f. (Fig. 11.) denken, die, von verschiedenen Kräften angetrieben, alle unter sich parallel sind. Man sieht aus den oben dargestellten Grundsätzen ein, daß man, um die resultirende der beyden Kräfte A, B zu finden, die gerade Linie A B in dem Puncte m in Theile theilen muß, die diesen Kräften wechselseitig proportionirt sind; daß ferner diese resultirende A + B seyn, daß sie durch den Punct m gehen, und daß sie mit den erstern parallel seyn wird. Ist diese resultirende gefunden, so wird man aus demselben Grunde bloß die gerade Linie m C im Puncte n, in dem wechselseitigen Verhältnisse dieser resultiren-

den A + B und der Kraft C, zu theilen brauchen, und wenn man durch den Punct n eine Parallele mit den gegebenen Kräften zieht, so wird sie die Richtung der aus den drey Kräften A, B, C, resultirenden angeben; und diese resultirende wird A + B + C seyn. Indem man nun so fort mit allen andern Kräften des Systems auf gleiche Weise verfährt, so wird man den Punct Q finden, durch welchen die Richtung der allgemeinen resultirenden gehen muß. Diese resultirende wird die Summe aller der zusammensetzenden Kräfte, und eben diesen Kräften parallel seyn.

Nun muß man bemerken, daß die oben angezeigte Construction keinesweges von der Richtung der Kräfte, sondern bloß von ihrer Größe und ihrer parallelen Lage abhängt. So würden die Puncte m, n, o, p, Q jederzeit dieselben seyn, wenn die Kräfte nur dieselben blieben und bloß ihre Richtung veränderten, dabey aber ihren Parallelismus behielten. Diese Puncte heißen Mittelpuncte der Parallelkräfte; das heißt also, der Mittelpunct der Parallelkräfte A, B, ist m; der der Parallelkräfte A, B, C, ist n, u. s. f.; und endlich ist Q das Centrum der Parallelkräfte des ganzen Systems.

111. Denken wir uns von jedem der Puncte A, B, C u. s. w. m, n, o, p u. s. w. Per-

pendikulärlinien $\overline{A a^1}$, $\overline{B b^1}$, $\overline{m m^1}$, auf irgend eine Ebene gefällt, so ist leicht einzusehen, daß, weil die Momente $A \cdot \overline{A m}$, $B \cdot \overline{B m}$ im Verhältniß zu dem Puncte m einander gleich sind, man in Rücksicht auf irgend einen beliebigen, in der Richtung von A B angenommenen Punct $m^{11}$, wird erhalten müssen:

$$A \cdot \overline{A m^{11}} + B \cdot \overline{B m^{11}} = (A + B) \overline{m m^{11}};$$

denn man hat

$\overline{A m^{11}} = \overline{A m} + \overline{m m^{11}}$, $\overline{B m^{11}} = \overline{m m^{11}} - \overline{B m}$.

Wenn wir diese Werthe in der Gleichung $A \overline{A m} - B \overline{B m} = 0$ substituiren, welche die Gleichheit der Momente in Bezug auf den Punct m giebt; so erhalten wir

$$A \overline{A m^{11}} + B \cdot \overline{B m^{11}} = |A + B| \overline{m m^{11}}.$$

Man könnte durch ein ähnliches Raisonnement, indem man die aus A und B zusammengesetzte Kraft A + B als eine einzige, an dem Punct m angebrachte Kraft ansähe, und $n^1$, $o^1$, $p^1$, $q^1$ rc. die Puncte nennte, wo in die von den Puncten n, o, p, q rc. auf dieselbe Ebene herab gefällten Perpendikel hintreffen würden; man könnte, sage ich, auf eine ähnliche Art beweisen, daß man

$$A \cdot \overline{Aa^1} + B \cdot \overline{Bb^1} + C \cdot \overline{Cc^1} + D \cdot \overline{Dd^1} = (A + B + C + D)\, \overline{oo^1},$$

und so fort bekommen müsse. Das heißt, daß überhaupt

> in einem System von Parallelkräften die Summe der Momente dieser Kräfte, in Bezug auf eine gegebene Ebene, oder, die Summe der Producte aus jeder dieser Kräfte in die Entfernung von dem Puncte, wo sie auf irgend einer gegebenen Ebene angebracht ist, gleich ist der Summe aller dieser Kräfte, multiplicirt durch die Entfernung von ihrem gemeinschaftlichen Mittelpuncte in derselben Ebene.

Folglich, wenn man A, B, C, D ꝛc. mehrere parallel an beliebigen Körpern angebrachte Kräfte nennt; a, b, c, d ꝛc. die Entfernungen von diesen Körpern auf irgend einer Fläche; p die Entfernung von dem allgemeinen Mittelpuncte dieser Kräfte in derselben Fläche, so wird man haben

$$A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c + \text{etc.} = (A + B + C + \text{etc.})\, p;$$

folglich

Kräfte wirken ... eine unendlich wenig ... verschieden, gewicht halten ... perpendikular

Denken wir ... zweyte Glied schiene ohne ... $= pp'$; folglich Kräfte P, ... nämlichen ... annehmen ... gesetzt ... $pp'$ und eine Stelle ... Kräfte P, Q, Q sich ... Kräfte. ... im Gle... Maschiene ... die geraden gezogen worden ... mag da ... Linien seyn.

Es seyen ... Enden an welchen diese Kr... , vermöge dieser ... laufenen Räume; die ... und der Geschwindigkeiten der... wenn man von den ... pendikel $P'm$, $Q'n$ ... $QB$ dieser Kräfte fäll... $Pm$, $Qn$ augenschein... derselben Puncte, nach ... geschätzt, seyn.

Jetzt wollen wir ... Rollen A und B zwey ... ren, z. B. zwey Seile ...

$\overline{p}$, $\overline{bq}$ den unendlich
$q^2$ proportionirt sind,
gleich, die nach der
= Q; und da es immer
, daß $\overline{pp^2} = \overline{Pm}$,
die Proportion wieder,
das heißt, die Kurve
[illegible] Betrachtungen immer
r Ursprung dieser Kurve
, an welcher sie [illegible]
n seyn, wie sie will.

[illegible] das hinaus, was
[illegible] Eigenschaften,
ich nach dem Namen [illegible]
, nenne.

p war sehr schön, nur
icht durch die [illegible]
Fälle, die sich [illegible]
und welcher es nicht [illegible]
h es auf eine sehr [illegible]
[illegible] an einer mit [illegible]
[illegible] Reihen [illegible]

[illegible] nun [illegible]
[illegible]
[illegible]

lich beym Hebezeuge, beym Hebel, bey der Rol[le,] bey der Haspel, bey der schiefen Ebne, bey [der] Schraube und dem Keil; und das planire [Rai-]sonnement, nach dem man durch andere [Betrach-]tungen das Gesetz des Gleichgewichts für [die-]selben findet, haben diese Resultate der [Erfahrung] bestätiget.

Hieraus war es in der Folge leicht zu [schlie-]ßen, daß dasselbe Gesetz auf eine [zusammengesetzte] Maschiene müßte angewendet werden können, [in] welcher bloß zwey Kräfte gebraucht würden, [weil] es darunter keine giebt, welche man nicht [als] eine Vereinigung von mehreren einfachen [Maschi-]nen ansehen könnte, vermittelst welcher die Wirkung der ersten Kraft von einer zur andern bis zur letzten fortgehet.

Es ist folglich bloß noch zu erwei[sen,] [illegible] Prinzip auf jedes [illegible] [illegible] an einer und derselben [Maschiene] von mehreren Kräften angewendet werden [kann.]

[illegible] uns verschiedene [illegible] [illegible] u. s. w. (Fig. [illegible] [illegible] angebracht, und [illegible] [illegible] eine Roll, für [illegible] [illegible] Gewicht

[illegible] u. s. w. [illegible] [illegible] zwischen [illegible] zwey von [illegible].

q, eine gerade Linie $\overline{pq}$, die durch die Ve-
gung der Anbringungspuncte der Kräfte P, Q,
$\overline{pq'}$ wird, so ist aus dem, was oben für
Fall, wo bloß zwey Kräfte in dem [illegible]
ren, gesagt worden ist, klar, daß $\overline{pp'}$, $\overline{qq'}$,
respectiven Geschwindigkeiten der Puncte P, Q
n werden, geschätzt nach der Richtung dieser
angebrachten und ebenfalls durch P und Q ge-
chneten Kräfte.

Folglich, wenn man annimmt, daß K der Durchschnittspunct von $\overline{pq}$, $\overline{p'q'}$, und die Gewichte p, q an den Enden dieser geraden Linie $\overline{pq}$ befestiget sind, so wird man sie als einen Hebel, der sich frey um den festen Punct herumdreht, und der auf keine Weise die Wechselwirkung der Gewichte p und q hindert, ansehen können.

Ferner, weil wir Herr sind über die Stellung der für jede Kraft angebrachten Rollen, so ist es einleuchtend, daß, wenn wir, wo es nöthig ist, für jede Kraft zwey Rollen anbringen, wir es machen können, daß die für diese Kräfte substituirten Gewichte, nicht allein in eine und ebendieselbe Fläche und in eine und ebendieselbe gerade Linie, sondern auch in jeden beliebigen Punct dieser geraden Linie fallen müssen.

Denken wir uns nun wirklich alle diese Gewichte in die gerade Linie $\overline{pq}$, und in die Puncte dieses Hebels gebracht, deren bestimmte Bewegung, wie wir oben an den Bewegungen der Körper p, q, gesehen haben, mit denen der neuen Gewichte zusammentrifft; das heißt z. B. so daß r in den P[illegible] Hebels fällt, der die nämliche Geschwindigk[illegible]nd nach derselben Richtung hat, wie das Gew[illegible] r selbst; so ist es einleuchtend, daß man sich [illegible] alle die Gewichte p, q, r, s an einem und eb[illegible]demselben Hebel, dessen fixer Punct in K ist, [illegible] gebracht denken könne, ohne daß die Wechselwi[illegible]ng zwischen diesen Gewichten gestört werde. Es wird folglich gleichgültig seyn, ob diese Gewichte an der gegebenen Maschiene, oder an den Hebel befestigt bleiben, und das Gleichgewicht wird zwischen ihnen eben so Statt finden, als zwischen den Kräften P, Q, R, S ꝛc. an deren Stelle sie getreten sind.

Ferner sind nach dem, was für den Fall, wo bloß zwey Kräfte in dem Systeme sind, gesagt worden ist, die Geschwindigkeiten der Gewichte p, q, r, s ꝛc. gleich den Geschwindigkeiten der Puncte P, Q, R, S u. s. w. wo die Kräfte angebracht worden sind, geschätzt nach der Richtung der gleichnamigen Kräfte; folglich werden, da man voraussetzt, daß die Gewichte in einer unendlich kurzen Zeit die kleinen Räume $\overline{pp^1}$, $\overline{qq^1}$, $\overline{rr^1}$, u [illegible] durchlaufen, diese kleinen Räume, die

indigkeiten der Kräfte P, Q, R, S ꝛc., nach
Richtung dieser Kräfte geschätzt, ausdrücken,
y man diejenigen von diesen Räumen, die von
i nach oben zu gerichtet sind, als negativ
it; das heißt, wenn man $P^1$, $Q^1$, $R^1$, $S^1$ ꝛc.
diesen Kräften zugehörigen Geschwindigkeiten,
ich nach der Richtung dieser Kräfte geschätzt,
t, so hat man

$$= \overline{pp^1},\ Q^1 = -\overline{qq^1},\ R^1 = \overline{rr^1},$$
$$S^1 = -\overline{ss^1} \text{ etc.}$$

nach dem Gesetz des Gleichgewichts bey dem
, an welchem mehrere Kräfte gleichzeitig an-
cht werden, haben wir:

$$p^1 - q \cdot \overline{qq^1} + r \cdot \overline{rr^1} - s \cdot \overline{ss^1} = 0,$$
$$P \cdot P^1 + Q \cdot Q^1 + R \cdot R^1 + S \cdot S^1 + \text{etc.}$$
$$= 0.$$

heißt, die Maschiene, an welcher die Kräfte
), R, S etc. angebracht sind, die sich im
ent, wo die Maschiene durch eine gegebene
ing geht, gegenseitig vernichten, sey welche
olle, so wird die Summe der Producte aus
dieser Kräfte in ihre Geschwindigkeit, ge-
nach der Richtung dieser Kraft, gleich
seyn, und dieß ist das Prinzip der virtuellen
vindigkeiten auf jedes beliebige System von
eitig an einer und ebenderselben Maschiene

gewicht setzen müssen, reicht es hin, zu beweisen, daß, wenn man die Maschiene sich selbst überläßt, der Schwerpunct des Systems nicht herabsteigen kann.

126. Die unmittelbare Folge aus diesem, ohne Ausnahme wahren Prinzip ist, daß, wenn der Schwerpunct dieses Systems in dem möglichst tiefsten Puncte liegt, nothwendig Gleichgewicht Statt finden muß; denn nach dem vorigen Satze ist es zum Beweis hinreichend, wenn man zeigt, daß der Schwerpunct nicht herabsteigen kann; wie soll er aber herabsteigen, da er nach der Annahme in dem möglichst tiefsten Puncte liegt?

127. Man kann die Bemerkung machen, daß es nicht richtig seyn würde, wenn man sagte, daß umgekehrt allemal, wenn Gleichgewicht Statt findet, der Schwerpunct nothwendig in dem möglichst tiefsten Puncte sey; denn es könnte sich ereignen, daß er im Gegentheil im höchsten Puncte läge, oder auch, daß er sich weder in dem höchsten, noch in dem niedrigsten Puncte befände. Dieß sind, wie bekannt, sehr gewöhnliche Ausnahmen in der Theorie der Maximums und Minimums. Aber das Prinzip, wie wir es oben dargestellt haben, hat den Vortheil, daß es keiner Ausnahme unterworfen ist.

128. Dieses Prinzip bietet sich gewissermaßen schon von selbst dem Geiste dar, man muß es

aber als sehr wichtig ansehe[illegible]

flüchtigem Nachdenken einse[illegible]

zip der virtuellen Geschw[illegible]

anzeigt, welches man mi[illegible]

talprinzip ansieht, und n[illegible]

sich allein alle Gesetze der G[illegible]

Bewegung enthält. [illegible]

kein anderes, als das [illegible]

der bey Maschienen mit Gew[illegible]

niedrigsten Puncte lieg[illegible]

Dieses letztere Prinzip ist [illegible]

es auf den Weg der [illegible]

gemacht werden müssen, [illegible]

tuellen Geschwindigkeit [illegible]

gen, und da man in der [illegible]

Maschiene auf eine Masch[illegible]

rückzubringen, nichts [illegible]

man mittelst einer [illegible]

dern Kraft, ein Gewicht [illegible]

wird dann in dem mögl[illegible]

seyn, oder genauer, es [illegible]

seyn, daß, man drück[illegible]

lich kleine Bewegung [illegible]

Schwerpunct dennoch [illegible]

Folglich wird die Sum[illegible] V

Gewichte, in den [illegible]

schreibt, gleich N[illegible]

(122), daß jedes [illegible] Glied

der Kraft, deren [illegible] sich auf

multiplicirt durch [illegible]

nach der Richtung [illegible]

ße der Bewegung M U, durch die
der entgegengesetzten Richtung wie-
, wenn die Körper vollkommen ela-
sieht man, daß in diesem letztern
größer, als im erstern, seyn muß,
elches im erstern Fall aufgehoben
zweyten aber wieder zum Vorschein
so groß; das heißt, anstatt daß
n Körpern hat

$$= \int M W^2 - \int M U^2,$$

nun für die elastischen Körper haben,

$$\int M V^2 = \int M W^2.$$

muß es bey vollkommen elastischen
Verminderung von lebendigen Kräf-
wie viel auch übrigens das System
n mag. Nun kennt man auch aus
, nach dem, was zwischen zwey Kör-
tatt findet, diese Thatsache schon seit
, ob man gleich keinen allgemeinen
r gehabt hat.

iese, dem Anscheine nach so verschie-
doch mit den aufgestellten Hypothesen
nstimmenden Resultate müssen uns ein
Vertrauen auf die Richtigkeit dieser
einflößen, als es bey einer Wissen-
nothwendig zum Theil auf die Erfah-

... auch [illegible]
...nen noch [illegible]
...lte, welcher [illegible]
...gung [illegible].

...ndigkeit, [illegible]
...gliche Körper [illegible]
...ometrische [illegible]
...nt werden.

... wenn man zwey Körper [illegible]
... sich zu stoßen, eine gemeinschaftliche
... theilt, so [illegible]
... Stoßes, der [illegible]
...erändert [illegible]; denn [illegible]
wirken [illegible]
absoluten [illegible]
...möge ihrer [illegible]
Nun aber [illegible]
...nen mitgetheilte Bewegung [illegible]
...ndigkeit [illegible]
...ndigkeiten. [illegible]
[illegible]

[illegible]

ge Seitenlinien $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ in derselben Gl…
und in entgegengesetzter Richtung mittheilt, so
ist offenbar, daß diese Geschwindigkeiten sich ei…
gegenseitig [illegible] werden, daß sie folglich
Wirkung, die diese beyden Körper außerdem wi…
sich auf einander ausüben, oder ausüben könn…
z. B. vermöge der Schwere, oder auf eine and…
Weise, weder zu vermehren, noch zu vermind…
hindern würden. Folglich gehört diese kreisförm…
Bewegung des Hebels zu denjenigen, die ich ge…
metrische Bewegungen genannt habe.

140. Es seyen A und B zwey Körper, wel…
an den Enden eines Seiles, das über eine f…
Rolle, (Fig. 16.) und zu beyden Seiten verti…
herunter geht. Man theile dem Körper A z. …
irgend eine Geschwindigkeit von oben nach unt…
und dem Körper B eine gleiche Geschwindigkeit …
unten nach oben zu mit, so ist es deutlich, …
die Wirkung, welche durch das Seil von ein…
Körper auf den andern übergetragen wird, …
[illegible] können, welche sie will, …
[illegible] durch die den Körpern A und B mit…
theilten Geschwindigkeiten gar nicht verändert …
den wird. Folglich wird diese dem System …
mitgetheilte Bewegung zu denen gehören, die ich ge…
ometrische Bewegungen genannt habe.

[illegible] A und B [illegible] an …
[illegible] (Fig. [illegible]) durch ei…

verschiebbaren Ring C geht, befestigte Körper. Man theile diesen Körpern solche Geschwindigkeiten mit, daß, wenn sie von diesen Geschwindigkeiten allein getrieben würden, sie sich nach beliebigen Richtungen $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$ bewegen müßten, so daß man nach Verlauf einer unendlich kurzen Zeit $aCb = ACB$ hätte, so wird die Bewegung eine geometrische seyn; denn da eine solche Bewegung für sich allein den Faden weder zu verlängern noch zu verkürzen strebt, so kann sich auch die Spannung desselben weder vermehren noch vermindern; und sie verändert folglich die Wirkung, welche die Körper außerdem auf einander ausüben könnten, um nichts. Folglich gehört sie zu denen, die ich geometrische Bewegungen genannt habe.

142. Gesetzt, man habe eine vertikale Schraube mit ihrer Schraubenmutter; man drehe diese Schraubenmutter um ein Gewinde der Schraube gleichförmig aufwärts; während daß man eben so gleichförmig das Querholz der Schraube eine ganze Kreisbewegung machen läßt. Diese beyden Bewegungen werden so mit einander übereinstimmen, daß sie einander nicht im Wege seyn können; folglich werden sie auf keine Weise die Wirkung verändern, die außerdem die Schraubenmutter, und der bewegliche Körper, den man am Ende des Querholzes befestiget hat, gegen einander ausüben könnten; folglich gehört die dem System

rie bestimmen, und darum eben nenne ich sie metrische Bewegungen.

145. Die Theorie der geometrischen Bewegen ist sehr wichtig; sie ist, wie ich schon ersswo bemerkt habe, (Géométrie de posin p. 337.) eine Wissenschaft, die gewissersßen zwischen der reinen Geometrie und der Menik mitten inne liegt. Sie ist die Theorie der wegungen, die irgend ein System von Körpern nehmen kann, ohne daß sie sich gegenseitig im ege sind, ohne daß sie weder eine Wirkung, h irgend eine Gegenwirkung auf einander ausen. Diese Wissenschaft ist niemals besonders andelt worden; sie muß durchaus neugeschaffen rden, und verdient sowohl wegen ihrer Schwiet an sich selbst, als wegen ihres Nutzens die fmerksamkeit der Gelehrten. Denn die großen alytischen Schwierigkeiten, die man in der Menik, und vorzüglich in der Hydraulik antrifft, nmen einzig und allein daher, daß die Theorie geometrischen Bewegungen noch nicht ins Reine racht ist. Ich werde mich hier auf die Beschreibung der vorzüglichsten Eigenschaften dieser Begungen einschränken, in so weit sie mir zu dem m hier unternommenen Werke nöthig sind.

## Erster Lehrsatz.

146. Wenn zwey Körper durch ruck oder Zug auf einander

[illegible] dieß [illegible]
[illegible] Jar, wenn [illegible]
[illegible] oder durch [illegible]
[illegible] einander [illegible]
[illegible] liegender [illegible]
[illegible] von [illegible]
[illegible] Reihe und [illegible]
[illegible] diese [illegible]
[illegible] Körpern [illegible]

Dieser Zug [illegible]
[illegible] Ursache. [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible], weil [illegible]
[illegible] wenn sich [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] man [illegible]
[illegible] zwischen diesen [illegible]
[illegible] dem [illegible]
[illegible]

Bewegungen zu gelangen [illegible]
Seile, die Hebel, [illegible]
en, als wirkliche [illegible]
[illegible] von den gewöhnlichen [illegible]

## [illegible]

enn ein System [illegible]
e geometrische [illegible]
eses System [illegible]
en oder [illegible]
[illegible]

In der That, bey der gegenseitigen Wirkung derjenigen Körper, die zu irgend einem zusammengesetzten System gehören, wirkt jeder von ihnen auf die an ihn grenzenden, und diese pflanzen diese Wirkung nach und nach zu den andern fort, so daß man jederzeit nur auf die unmittelbare Wirkung zu achten hat, die zwischen den an einander stoßenden Körpern ausgeübt wird (73.). Nun aber hängt die Intensität der Wirkung, welche irgend ein Körper auf jeden von denen, die an ihn grenzen, ausübt, einzig und allein von ihrer respectiven Geschwindigkeit ab; folglich verändert die geometrische Bewegung, da sie diese wechselseitige Wirkung nicht ändert, die respective Geschwindigkeit eben so wenig; folglich streben diese beyden an einander stoßenden Körper im ersten Augenblick eben so wenig sich einander zu nähern, oder von einander zu entfernen, als sie es thun würden, wenn diese geometrische Bewegung aufgehoben wäre. Folglich strebt die, dieser geometrischen Bewegung gerade zu entgegengesetzte auf die nämliche Weise auch nicht, weder diese beyden Körper einander zu nähern, noch von einander zu entfernen; folglich verändert sie, eben so wenig wie die erste, die Intensität der Wirkung, die zwischen diesen beyden an einander stoßenden Körpern Statt findet, um nichts; mithin ist diese zweyte Bewegung selbst eine von denen, die ich geometrische genannt habe, und muß folglich ohne Störung Statt finden, weil es zur Natur dieser Bewegungen gehört, die verschiedenen Körper des

ystems niemals zu nöthigen, daß sie sich einander im Wege wären. Dieß war es, was bewiesen werden sollte.

149. Gesetzt, zwey Körper A, B z. B. seyn
Begriff, sich einander zu begegnen, und es entsteht daraus ein Stoß. Theilen wir, in dem Augenblicke des Stoßes dem Systeme eine gemeinschaftliche Bewegung nach der Linie mit, so wird diese gemeinschaftliche Bewegung (136.) eine geometrische Bewegung seyn. Auch ist es einleuchtend, daß die ihr gleiche und gerade entgegengesetzte Bewegung ebenfalls eine mögliche und geometrische Bewegung seyn würde.

Aber, wenn man, anstatt dieser schon gemeinschaftlichen Bewegung, z. B. dem B nach der Richtung AB eine größere Geschwindigkeit als die, welche man zu gleicher Zeit A gebe, mittheilte; so würde diese Bewegung zwar möglich, aber nicht geometrisch seyn; denn, um dem Systeme eine gleiche und gerade entgegengesetzte Richtung zu geben, müßte B eine größere Geschwindigkeit, als A, in der Richtung von A annehmen können. Dieß ist augenscheinlich unmöglich, wegen der Undurchdringlichkeit der Körper. Eben so, wenn sich zwey Körper A, B getrennt durch einen unausdehnbaren Faden, auf irgend eine Weise fortzögen und sich so bewegten, daß der Faden immer gespannt bliebe, so würde

gewi
bewe
sich
des

ohne
der Ge
tiefsten
Statt
ist es
daß
wie so
nahme

es n
daß
finde
lichst
eign
läg
sten
Di
nah
ain
dar
ner

sch

enn die an einander grenzenden Körp.
ns, durch welche sich die Bewegun
ach, von einem zum andern, je zwe
betrachtet, fortpflanzt, streben sie
der zu nähern, noch von einander
, weder vermöge der ersten, noch
weyten der beyden sie zusammensetzen
ngen, weil sie nach der Voraussetzung
etrisch sind. Folglich streben sie
sich durch Hülfe der aus den bey
ringenden Bewegung, weder einan
noch sich von einander zu entfern
, verändert diese zusammengesetzte Beweg
es an den Geschwindigkeiten dieser Körp
sie an einander grenzen, je zwey
einmal betrachtet, das heißt, sie
der Geschwindigkeit derer, die unmittel
ander wirken können. Folglich kann
enseitige Wirkung nicht stören;
zu den von mir sogenannten geom
wegungen. Dieß war es, was
rden sollte.

## Erster Zusatz.

151. Dasselbe würde augenscheinlich
Fall seyn, wenn man, anstatt der
zwey geometrischen Bewegungen
Anzahl derselben dem Er
voraussetzt, daß sie

[illegible]

In der That [illegible] Bewegung des [illegible] nach dem [illegible] die [illegible] es ist noch zu [illegible] müßte, wenn [illegible] individuelle [illegible] vorhergehenden [illegible] Bewegung, die nach dem [illegible] Veränderung [illegible] was [illegible] erste Bewegung [illegible] die [illegible] zu nähern, noch [illegible] lich [illegible] die Einwirkung [illegible] Beynahme [illegible] Bewegung [illegible] ein [illegible] Bewegungen [illegible] sich in der That [illegible] gut sich einander [illegible] selen, d. h. die, welche [illegible] war noch übrig zu bemerken.

## Vierter Zusatz.

157. Die beyden Bewegungen, [illegible] welche sich

...ischen Körpern nicht, deren relative G...
...igkeit nach dem Stoße nicht Null, sonder...
...ativen Geschwindigkeit vor dem Stoße gleic...
3.).

## Siebenter Lehrsatz.

58. Wenn man in einem S...
...er Körper, die, entweder u...
oder vermöge irgend einer ...
...ischen Maschiene auf einander ...
in dem Augenblick, wo der ...
sich gehen will, die allgemein...
...ung in zwey andere zerlegt, ...
...eine diejenige ist, die durch den ...
...gehoben werden soll, und ...
Stelle der zweyten irgend ...
geometrische Bewegung sey
...d diese neue Bewegung ...
..., welche wirklich nach dem ...
...d Statt haben sollen.

Denn diese Substitution bestehe...
andern Operationen, die zu ...
gehen; nämlich 1) in der ...
...ng, die nach dem Stoße ... und
...n ihrer Wiederersetzung du... ...
...ische Bewegung. Da a...

nur von den [illegible]
unter den [illegible]
ne keinesweges [illegible]
ne macht also [illegible]
, die wir [illegible]
der [illegible]
hung zwischen [illegible]
g.).

## Zehntes [illegible]

[illegible]

- cos. a A a² + B - $\overline{B b}$ - $\overline{B b}$ -
b B b² = o, (C) oder
$\overline{A a}$ - cos. a A a²) + (B - $\overline{B b}$)
cos. b B b²) = o, (D).

$\overline{A a^2}$ die Quantität, der durch den
lohrnen Bewegung, und $\overline{A a}$ - cos.
ine Geschwindigkeit, in der Richtung
ngsgröße geschätzt.

ist B - B b² die Quantität der durch
B verlohrnen Bewegung, und B b²
ist seine Geschwindigkeit, in der
er Kraft geschätzt. Folglich ist diese
D)) nichts anders, als eine allgemei-
ung des ausgesprochenen Theorems.

en jedoch in der Erklärung angenom-
ybde Körper A und B beweglich sind,
on ihnen, z. E. B unbeweglich wäre,
Gegenwirkung der Wirkung nicht
und entgegengesetzt seyn; auch die
ng (A) gälte nicht mehr; aber die
B) würde immer noch richtig seyn,
nbewegliche Körper, oder der Wider-
lasticität angenommen wird. Folglich
B b = o, die Gleichung (C) noch
auch die Gleichung (D) würde das
wie im ersten Fall; mithin gilt diese

Zweyter Zusatz.

[illegible]
[illegible]
n Stößen [illegible], [illegible]
Gleichungen [illegible]

Körpers A = . . A
, B = . . B

gkeit $\overline{AA^1}$ des Körpers
m Stoß = . (W, A)

ndigkeit $\overline{Aa}$ nach dem
. . (V, A)

igkeit $\overline{Aa^1}$, die durch
Stoß verlohren geht = (U, A)

gkeit, die ihm durch den
mitgetheilt wird, durch
t des Stoßes, und die
1.) gleich und entgegen-
(U, A) = . (U, B, A)

A' A a, den seine Ge-
keit nach dem Stoße, mit
Geschwindigkeit vor dem
achte, = . (W, A)^(V, A)

A' A a', den seine Ge-
keit vor dem Stoße, mit
windigkeit macht, die er
n Stoß verliehrt, =
(W, A)^(U, A)

den Winkel a A' a, den seine Geschwindigkeit nach dem Stoße, mit der Geschwindigkeit macht, die durch den Stoß verlohren geht, = . . (V, A)^(U, A
und eben so
die Geschwindigkeit B B' des Körpers B vor dem Stoße = . (W, B
seine Geschwindigkeit nach dem Stoß = (V, B
seine Geschwindigkeit, die durch den Stoß verlohren geht, = . (U, B
die Geschwindigkeit, die ihm der Körper A mittheilt, durch die Kraft des Stoßes, und die der vorigen gleich und gerade entgegengesetzt seyn muß, = . . (U, A, B
den Winkel B' B b, den seine Geschwindigkeit nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit vor demselben macht, = . (W, B)^(V, B
den Winkel B' B b', den seine Geschwindigkeit vor dem Stoß mit der verlohrnen macht, = (W, B)^(U, B
den Winkel b B' b, den seine Geschwindigkeit nach dem Stoße mit der verlohren gegangenen macht, = . . (V, B)^U, B

Dieß festgesetzt, so ist es klar, daß die Formeln (D) und (E) folgende Gestalt erhalten werden:

$$A.\,(U, B, A)\,(V, A)\,\cos.\,(V, A)^\wedge(U, B, A)$$
$$+\,B.\,(U, A, B)\,(V, B)\,\cos.\,(V, B)^\wedge(U, A, B) = 0 \quad (D')$$
$$A.\,(V, A)\,[(W, A)\,\cos.\,(W, A)^\wedge(V, A) - (V, A)]$$
$$+\,B.\,(V, B)\,[(W, B)\,\cos.\,(W, B)^\wedge(V, B) - (V, B)] = 0, \quad (E')$$

## Bemerkungen.

166. Man erkennt sehr leicht, welchen Zweck die im vorhergehenden Zusatz angenommenen Benennungen haben. Sie würden unnütz seyn, wenn wir uns bloß auf zwey Körper A und B einschränken wollten; allein, es ist unsere Absicht, die Theorie des Stoßes auf ein jedes System auszudehnen; und dann würden zuviel verschiedene Charaktere gebraucht werden müssen, um alle die Quantitäten zu bezeichnen, die verbunden seyn müssen, wenn man nicht lieber diese Charaktere, vermittelst einer systematischen Ordnung derselben, auf eine kleine Zahl zurückbringen will, die sich mehr dazu eignet, das bemerklich zu machen, worauf sich jedes bezieht, und eine gewisse Gleichförmigkeit in die Ausdrücke zu bringen. Dieß kann man auf mehrere Arten thun; die meinige ist, jeden Körper des Systems durch einen besondern Buchstaben zu bezeichnen, also so: überhaupt durch W, die Geschwindigkeit vor dem Stoß; durch V,

den Winkel a A' a, den seine Geschwindigkeit nach dem Stoße, mit der Geschwindigkeit macht, die durch den Stoß verlohren geht, = . . (V, A)^(U, A)

und eben so

die Geschwindigkeit B B' des Körpers B vor dem Stoße = . (W, B)

seine Geschwindigkeit nach dem Stoß = (V, B)

seine Geschwindigkeit, die durch den Stoß verlohren geht, = . (U, B)

die Geschwindigkeit, die ihm der Körper A mittheilt, durch die Kraft des Stoßes, und die der vorigen gleich und gerade entgegengesetzt seyn muß, = . . (U, A, B)

den Winkel B' B b, den seine Geschwindigkeit nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit vor demselben macht, = . (W, B)^(V, B)

den Winkel B' B b', den seine Geschwindigkeit vor dem Stoß mit der verlohrnen macht, = (W, B)^(U, B)

den Winkel b B' b, den seine Geschwindigkeit nach dem Stoße mit der verlohren gegangenen macht, = . . (V, B)^U, B)

Dieß festgesetzt, so ist es klar, daß die Formeln (D) und (E) folgende Gestalt erhalten werden:

$$A.\ (U,\ B,\ A)\ (V,\ A)\ \cos.\ (V,\ A)^\wedge(U,\ B,\ A)$$
$$+\ B.\ (U,\ A,\ B)\ (V,\ B)\ \cos.\ (V,\ B)^\wedge(U,\ A,\ B) = o\ (D')$$
$$A.\ (V,\ A)\ [(W,\ A)\ \cos.\ (W,\ A)^\wedge(V,\ A) - (V,\ A)]$$
$$+\ B.\ (V,\ B)\ [(W,\ B)\ \cos.\ (W,\ B)^\wedge(V,\ B) - (V,\ B)] = o,\ (E')$$

## Bemerkungen.

166. Man erkennt sehr leicht, welchen Zweck die im vorhergehenden Zusatz angenommenen Benennungen haben. Sie würden unnütz seyn, wenn wir uns bloß auf zwey Körper A und B einschränken wollten; allein, es ist unsere Absicht, die Theorie des Stoßes auf ein jedes System auszudehnen; und dann würden zuviel verschiedene Charaktere gebraucht werden müssen, um alle die Quantitäten zu bezeichnen, die verbunden seyn müssen, wenn man nicht lieber diese Charaktere, vermittelst einer systematischen Ordnung derselben, auf eine kleine Zahl zurückbringen will, die sich mehr dazu eignet, das bemerklich zu machen, worauf sich jedes bezieht, und eine gewisse Gleichförmigkeit in die Ausdrücke zu bringen. Dieß kann man auf mehrere Arten thun; die meinige ist, jeden Körper des Systems durch einen besondern Buchstaben zu bezeichnen, also so: überhaupt durch W, die Geschwindigkeit vor dem Stoß; durch V,

(U, F) cos. (U, F)^(V, F) =
— (U, B, F) cos. (U, B, F)^(V, F
— (U, C, F) cos. (U, C, F)^(V, F
— (U, H, F) cos. (U, H, F)^(V, F
— (U, J, F) cos. (U, J, F)^(V, F
— (U, K, F) cos. (U, K, F)^(V, F

Es sind dieß Gleichungen, die ganz einfach bezeichnen, daß die durch den Körper A verlohrne Geschwindigkeit, in der Richtung der Geschwindigkeit geschätzt, die ihm nach dem Stoß noch übrig ist, gleich, und schnurstracks entgegengesetzt ist der Summe von den Geschwindigkeiten, die ihm zugleich durch die Körper B, G, L, mit denen er zusammenstößt, mitgetheilt werden, alle in derselben Richtung von der ihm noch übriggebliebenen Geschwindigkeit angegeben; und eben so, daß die durch F verlohrne Geschwindigkeit, in der Richtung der nach dem Stoß ihm übrigbleibenden Geschwindigkeit betrachtet, gleich und gerade entgegengesetzt ist der Summe von den Geschwindigkeiten, die ihm zugleich durch die Körper B, C, H, J, K, an welche er angrenzt, mitgetheilt werden, alle wieder angegebenen in gleicher Richtung mit der ihm noch übrig bleibenden Geschwindigkeit; auch mit den übrigen.

## Eilfter Lehrsatz.

168. Bey dem Stoße fester

mögen ihrer auch in dem Systeme
, wie viel ihrer wollen, auch mö-
sie alle beweglich, oder zum Theil
stigt seyn, ist die Summe der Pro-
te der Quantität von Bewegung,
durch jeden Körper verlohren geht,
tiplicirt durch seine Geschwindigkeit
dem Stoß, in der Richtung dieser
ohrnen Quantität von Bewegung
achtet, gleich Null.

Dieser Satz ist ganz der ausgesprochene Lehr-
(163.) angewendet auf irgend eine beliebige
von Körpern, und läßt sich leicht aus der-
beweisen. Denn in der That: es mögen
. 21.) so viel Körper seyn, als man will,
ie plötzlich ein Stoß geschieht; die Figur zeigt
ich genug an, welche Körper an einander stos-
und unter denen folglich nur allein eine un-
lbare Einwirkung Statt findet. Dieß ange-
ien, so sieht man, nach der obigen (166.)
rkung, daß wir folgende Reihe von Gleichun-
n derselben Zahl erhalten, als wie viel Kör-
dem System sind:

$$\ldots, A)(V, A) \cos.(U, A)^{\wedge}(V, A) =$$
$$- A(U, B, A)(V, A) \cos.(U, B, A)^{\wedge}(V, A)$$
$$- A(U, G, A)(V, A) \cos.(U, G, A)'(V, A)$$
$$- A(U, L, A)(V, A) \cos.(U, L, A)^{\wedge}(V, A)$$

$$
\begin{aligned}
(U, F) \cos. U, F)^{\wedge} V, F) = \\
&- (U, B, F) \cos. (U, B, F) \\
&- (U, C, F) \cos. (U, C, F) \\
&- (U, H, F) \cos. (U, H, F) \\
&- (U, J, F) \cos. (U, J, F) \\
&- (U, K, F) \cos. (U, K, F)
\end{aligned}
$$

Es sind dieß Gleichungen, die ganz ei[...] zeichnen, daß die durch den Körper A [...] Geschwindigkeit, in der Richtung der [...] digkeit geschätzt, die ihm nach dem [...] übrig ist, gleich, und schnurstracks entge[...] ist der Summe von den Geschwindigkeiten, [...] zugleich durch die Körper B, G, L, m[...] er zusammenstößt, mitgetheilt werden, al[...] selben Richtung von der ihm noch übr[...] nen Geschwindigkeit angegeben; und eben [...] die durch F verlohrne Geschwindigkeit [...] Richtung der nach dem Stoß ihm übrigblei[...] schwindigkeit betrachtet, gleich und ge[...] gengesetzt ist der Summe von den Gesc[...] ten, die ihm zugleich durch die Körper [...] J, K, an welche er angrenzt, mitgeth[...] alle wieder angegebenen in gleicher Ri[...] der ihm noch übrig bleibenden Geschwin[...] auch mit den übrigen.

## Eilfter Lehrs[...]

168. Bey dem Stoße f[...]

I) =
F, H)^(V,H)
G, H)^(V, H)
, H)^(V, H)

=
F, J)^(V, J)
, H, J)(V, J)
, K, J)^(V, J)

=
F, K)^(V, K).
, G, K) (V, K)

, L) =
, A, L)^(V, L)

ungen hier bey,
lieder des zwey-
aufheben, ver-
z. B. das erste
Gleichung,
der A durch
hägt nach der
A nach dem
erste Glied des
ung ist die
lten Bewegung,
windigkeit von
ermöge des an-
der beyden Quan-

titäten gleich Null, wie man dieß aus der Formel ($D^1$) (165.) sieht, welcher eine andere Uebersetzung dieses Satzes, und die nämliche Summe ist, von der wir gesprochen haben.

Aus dem nämlichen Grunde sieht man, daß das zweyte Glied des zweyten Stückes der ersten Gleichung, und das erste Glied des zweyten Stückes der siebenden, zusammen eine Summe geben müssen, die gleich Null ist; eben so das dritte Glied des zweyten Stückes der ersten Gleichung, und das erste Glied des zweyten Stückes der eilften; gleichfalls, das zweyte Glied des zweyten Stückes der zweyten Gleichung, und das erste Glied des zweyten Stückes der dritten Gleichung; und so fort. Folglich fällt das ganze zweyte Stück der Gleichung, die aus allen übrigen resultirt, ganz weg; mithin ist auch die Summe der ersten Stücke Null.

Nun ist die Summe dieser letztern augenscheinlich die Summe der Producte der Quantität der Bewegung, die durch jeden Körper des Systems verlohren geht, multiplicirt durch seine Geschwindigkeit nach dem Stoße, in der Richtung dieser Quantität von Bewegung geschätzt. Folglich ist diese Summe gleich Null, und dieß ist ganz genau das, was in unserm Satze behauptet wurde. Dieß war es, was bewiesen werden mußte.

## Erster Zusatz.

169. Wir wollen durch M die Masse jedes Körpers des Systems, durch W seine Geschwindigkeit vor dem Stoß, durch V seine Geschwindigkeit nach dem Stoß, durch U seine durch den Stoß verlohrne Geschwindigkeit, durch das Zeichen ^ jederzeit, wenn es über die Bezeichnung zweyer Linien gesetzt wird, den Winkel, den sie bilden; und endlich durch Sum. die Summe aller Quantitäten derselben Art ausdrücken. Wir werden folglich für das ganze System haben

$$\underline{\text{Sum.}}\ M \cdot U \cdot V \cdot \cos.\ \hat{UV} = 0\ (F).$$

## Zweyter Zusatz.

170. Da dieser Satz immer gilt, wie groß auch die Zahl der Körper, und wie auch ihre Lage zu einander seyn mag, sie mögen ferner alle beweglich, oder zum Theil befestigt seyn (163.): so muß er auch offenbar gelten, der Stoß mag unter ihnen unmittelbar geschehen, oder vermittelst irgend einer nicht elastischen Maschiene wirken.

## Dritter Zusatz.

171. Für jeden von den fixen Körpern hat man V = 0. Also fällt das Glied, was ihm

[illegible]rt, weg, [illegible] [illegible] in [illegible] Formel [illegible] [illegible] der [illegible] des Systems. [illegible] also die [illegible] [illegible] durch [illegible] [illegible] [illegible] Theile [illegible], [illegible] Eigenschaften [illegible], die [illegible], [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Theile gar nicht in die For[illegible]

## [illegible] Zusatz.

[illegible]. [illegible] kann auch der [illegible] einen andern Ausdruck geben, denn (26.)

$$U. \cos. U^{\wedge}V = W. \cos. W^{\wedge}V$$

Substituirt man diesen Werth von [illegible] in der gefundenen Formel (F.) [illegible] lauten:

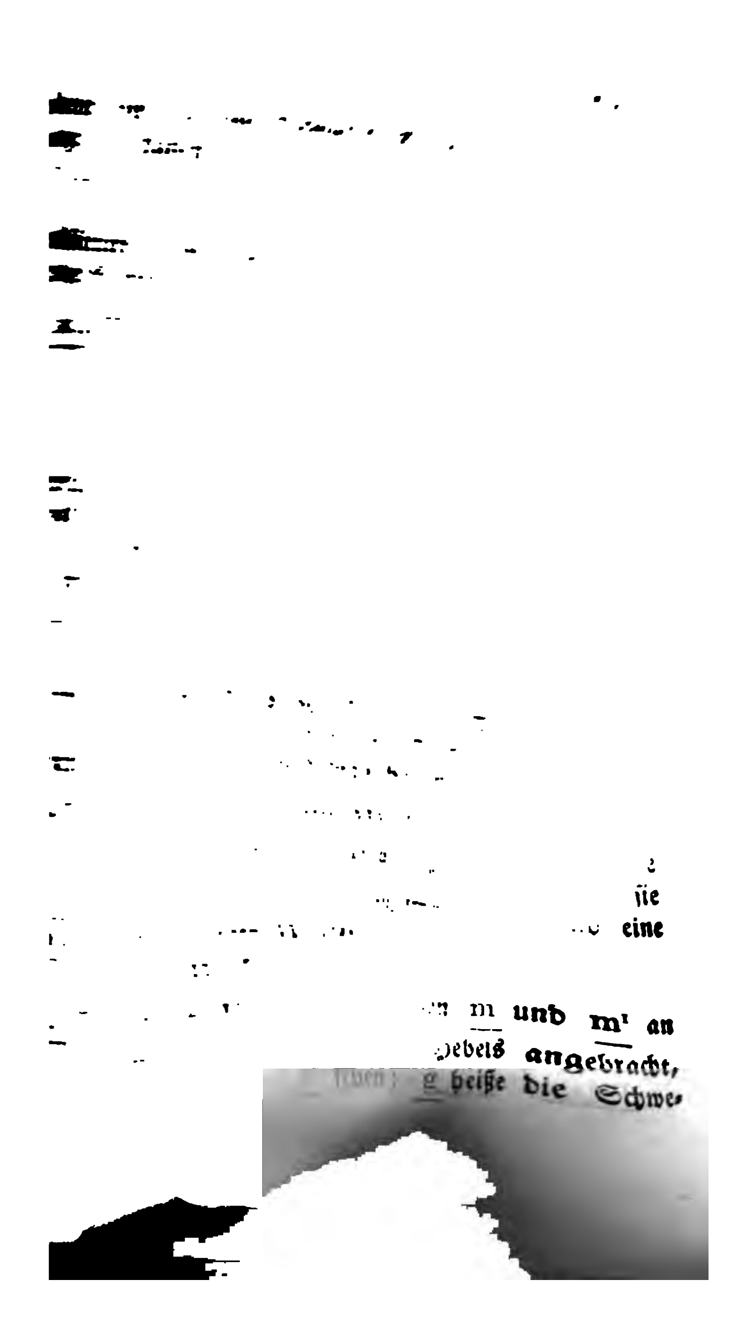
$$\underline{Sum.}\ M. W. V. \cos. W^{\wedge}V - \underline{Sum.}$$

oder

$$\underline{Sum.}\ M. W. V. \cos. W^{\wedge}V = \underline{Sum.}\ M$$

## Fünfter Zusatz.

[illegible]. Man kann auch der Formel ( [illegible] [illegible] neuen Ausdruck geben; [illegible] [illegible] aus V und U, so [illegible]



jie

eine

m und m' an

...gebels angebracht,

...ben; g heiße die Schwe-

bewegenden Kraft auf einander stoßen, seine Bewegung in unmerklichen Graden verändert, so bleibt die Summe der lebendigen Kräfte immerfort unverändert, ungeachtet des Ein- und Rückwirkens der Körper auf einander, und die Bewegung mag von einem dem andern unmittelbar, oder mittelst irgend einer Maschiene ohne Federkraft mitgetheilt werden.

## Dritter Zusatz.

178. Bey einer plötzlichen, ungestümen Veränderung ist das Quadrat von U, oder $U^2$ jederzeit positiv, der Werth U für die verlohrne Geschwindigkeit mag positiv oder negativ seyn. Es ist also $\underline{\text{Sum.}}\ MU^2$ jederzeit eine positive Größe, eben so wie $\underline{\text{Sum.}}\ MW^2$ und $\underline{\text{Sum.}}\ MV^2$; mithin ist vermöge der Gleichung (G) (175.) $\underline{\text{Sum.}}\ MW^2$ allezeit größer, als $\underline{\text{Sum.}}\ MV^2$; d. h. die Summe der lebendigen Kräfte nach dem Stoße ist dann allezeit kleiner, als vor demselben. Es findet also allezeit bey dem Stoße harter Körper, er geschehe nun unmittelbar, oder werde durch irgend eine Maschiene ohne Federkraft bewerkstelliget, ein Verlust an lebendigen Kräften Statt; und dieser Verlust an lebendigen Kräften ist stets gleich der Summe der lebendigen Kräfte, welche da seyn würde, wenn sich jeder der Körper ungehindert mit einer, seiner, durch den Stoß verlohrnen, gleichen Geschwindigkeit bewegte.

werde diesen Grundsatz das Gesetz des Verlustes an lebendigen Kräften beym Stoße harter Körper, nennen.

## Dreyzehnter Lehrsatz.

179. Bey dem Stoße von vollkommen elastischen Körpern, es seyen so viel ihrer wollen, ist die Summe der lebendigen Kräfte nach dem Stoße jederzeit gleich der Summe der lebendigen Kräfte, welche vor demselben Statt hatten.

Denn die Wirkung der Elasticität bringt es mit sich, daß die Größe der Bewegung, welche jeder Körper des Systems jedem andern giebt, verdoppelt wird, d. h. MU wird für jeden Körper des Systems das Doppelte von dem, was es bey harten Körpern seyn würde. Aber die Richtung dieser verlohrnen Bewegungsgröße ändert sich nicht, weil sie der aus allen, dem M eingedrückten Kräften resultirenden jederzeit gleich und gerade zu entgegengesetzt ist, und, da sich alle diese Kräfte zu gleicher Zeit verdoppelten, die Richtung ihrer Resultirenden sich nicht geändert haben kann; der Winkel U^W ist also derselbe, wie bey harten Körpern. Nun halten wir für harte Körper (173.)

$$\underline{\text{Sum.}}\, MUW.\cos. W^\wedge U - \underline{\text{Sum.}}\, MU^2 = 0.$$

..iesen Grundsatz das Gesetz des Verlu-
.n lebendigen Kräften beym Stoße
.r Körper, nennen.

## Dreyzehnter Lehrsatz.

79. Bey dem Stoße von vollkom-
elastischen Körpern, es seyen so
ihrer wollen, ist die Summe der
digen Kräfte nach dem Stoße je-
it gleich der Summe der lebendigen
te, welche vor demselben Statt
n.

enn die Wirkung der Elasticität bringt es
h, daß die Größe der Bewegung, welche jeder
r des Systems jedem andern giebt, verdoppelt
d. h. MU wird für jeden Körper des Sy-
das Doppelte von dem, was es bey harten
rn seyn würde. Aber die Richtung dieser
rnen Bewegungsgröße ändert sich nicht, weil
r aus allen, dem M eingedrückten Kräften
irenden jederzeit gleich und gerade zu entgegen-
: ist, und, da sich alle diese Kräfte zu glei-
Zeit verdoppelten, die Richtung ihrer Resul-
en sich nicht geändert haben kann; der Win-
^W ist also derselbe, wie bey harten Kör-
Nun halten wir für harte Körper (173.)

$$. MUW. \cos. W^U - \underline{Sum.} MU^2 = 0.$$

Angenommen also, daß, wenn die Körper vollkommen elastisch sind, die verlohrne Geschwindigkeit $U'$, und die übrig gebliebene $V'$ sey, $W$ aber dieselbe bleibt, so wird $U'$ das Doppelte von $U$, folglich $U = \frac{1}{2} U'$ seyn; mithin wird die Formel für vollkommen elastische Körper, wenn man alles mit 4 multiplicirt, diese seyn:

$$\underline{2\ \text{Sum.}}\ MU'W.\ \cos.\ W^\wedge U' - \underline{\text{Sum.}}\ MU'^2 = 0\ (H).$$

Daraus wird, weil $W.\ \cos.\ W^\wedge U' = V'\ \cos.\ V'^\wedge U' + W'$ ist,

$$\underline{2\ \text{Sum.}}\ MU'V'.\ \cos.\ V'^\wedge U' + \underline{\text{Sum.}}\ MU'^2 = 0\ (H').$$

Aber da andern Theils $W$ immer das Resultirende von $V'$ und $U'$ war (175.), so erhält man:

$$W^2 = V'^2 + U'^2 + 2\ V'U'\ \cos.\ V'^\wedge U',$$

und folglich:

$$\underline{\text{Sum.}}\ MW^2 = \underline{\text{Sum.}}\ MV'^2 + \underline{\text{Sum.}}\ MU'^2 + 2\ \underline{\text{Sum.}}\ MU'V'\ \cos.\ V'^\wedge U'.$$

Addirt man diese Gleichung zu der vorigen (H'), so erhält man, wenn man sie reducirt:

$$\underline{\text{Sum.}}\ MW^2 = \underline{\text{Sum.}}\ MV^{I2}; \text{ — } (H^{II})$$

welches der algebraische Ausdruck des Satzes ist, welcher zu beweisen war.

## Vierter Zusatz.

180. Wenn die Körper nicht vollkommen elastisch, aber doch alle von einer gleichen Elasticität $\underline{n}$, d. h. von einer solchen sind, daß statt der Verdoppelung der wechselseitigen Einwirkung der Körper, wie dieser Fall bey vollkommen elastischen Körpern eintritt, dieselbe Kraft bloß mit $\underline{n}$ multiplicirt würde: so ist es offenbar, daß die Richtung jeder der verlohrnen Geschwindigkeiten immer noch dieselbe seyn würde, eben so wie der Winkel W″U.

Dieß angenommen, so haben wir für harte Körper (173.)

$$\underline{\text{Sum.}}\ MUW.\ \cos.\ W''U - \underline{\text{Sum.}}\ MU^2 = 0.$$

Für den Fall also, in welchem der Grad von Elasticität durch n ausgedrückt ist, mag die verlohrne Geschwindigkeit $U^I$, die noch übrig gebliebene aber $V^I$ seyn, so bekommt man

$$U^I = nU, \text{ oder } U = \frac{1}{n} U^I.$$

[illegible] ungeachtet, daß die [illegible]
[illegible] auch der Richtung [illegible]
zwischen den [illegible]
Cent. a, [illegible]
B. [illegible]
[illegible] auf dieser [illegible]
[illegible] a² [illegible]
[illegible] B, [illegible]
[illegible] seyn; so [illegible]
[illegible] Bewegung [illegible]
[illegible] seyn. Also [illegible]
[illegible] Geschwindigkeit $a - a$, [illegible]
[illegible] Richtung [illegible]
[illegible] $b - \alpha$ seyn.

[illegible] der Richtung, [illegible]
[illegible] Seite, die [illegible]
[illegible] $a^2 - \alpha^2$, [illegible]
[illegible] seyn; mithin [illegible]
[illegible] Geschwindigkeit [illegible]

$\sqrt{(b-\alpha)^2+(b}$ [illegible]

[illegible] vermöge des Lehrsatzes [illegible]

[illegible] $-\alpha')^2]) + B[(b-$ [illegible]
[illegible] $= o$, oder

[illegible] $B\alpha)\,\delta\alpha + (Aa'$ [illegible]
[illegible] $B\beta')\,\delta\beta' = o$,

ichung, in welcher die Variationen ver-
B', schlechterdings von einander unabhän-
, und dieß kann nicht anders Statt finden,
n der Coefficient einer jeden = 0 ist.

n erhält also diese drey Gleichungen:

$$\frac{+ Bb}{+ B} = \alpha, \quad a' = \alpha', \quad b' = \beta'.$$

ieß war es, was bewiesen wer-
llte.

7. Dieses Gesetz erstreckt sich, mit den ge-
Modificationen, auf die Stöße, welche m
System vollkommen harter, oder auch mit
einer beständigen, d. h. für alle Körper
stems gleichen, Elasticität begabter Körper
haben können.

nn wenn wir voraussetzen, daß U' die
ie durch M verlohrne Geschwindigkeit aus-
so erhält man für den Fall vollkommner
er Körper $U' = 2U$, und im allgemeinen
nd einen, durch n ausgedrückten Grad der
tät $U' = nU$, oder $U = \frac{1}{n}U'$. Dieser
in die Gleichung $\delta \int MU^2 = 0$ substi-
giebt $\delta \int \frac{1}{n^2} MU'^2 = 0$. Wenn also n

Angenommen, daß die Geschwindigkeit A, dem theilt nach der Richtung von $\overline{AB}$, der Linie zwischen den beyderseitigen Mittelpuncten, vor dem Stoße a, und nach demselben $\alpha$ sey; daß die von B, nach derselben Richtung geschätzt, vor dem Stoße b, und nach ihm $\beta$ sey; daß ferner die von A, senkrecht auf dieser Mittelpunctslinie geschätzt, vor dem Stoße $a^1$ und nach demselben $\alpha^1$ sey, und daß endlich die von B, ebenfalls senkrecht auf dieser Mittelpunctslinie geschätzt, vor dem Stoße $b^1$ und nach ihm $\beta^1$ sey; so muß, da vermöge unsers Satzes die Bewegung geometrisch seyn muß, so fort $\alpha = \beta$ seyn. Also wird die für A nach $\overline{AB}$ verlohrne Geschwindigkeit $a - \alpha$, und die für B in derselben Richtung verlohrne Geschwindigkeit $b - \beta$, oder $b - \alpha$ seyn.

Ferner wird in der Richtung, welche auf der Mittelpunctslinie senkrecht steht, die von A verlohrne Geschwindigkeit $= a^1 - \alpha^1$, und die von B verlohrne $= b^1 - \beta^1$ seyn; mithin die von A und B verlohrnen Totalgeschwindigkeiten:

$$\sqrt{(a-\alpha)^2 + (a^1-\alpha^1)^2} \text{ u. } \sqrt{(b-\alpha)^2 + (b^1-\beta^1)^2}$$

Man bekommt also, vermöge des Lehrsatzes:

$$\delta.(A\,[(a-\alpha)^2 + (a^1-\alpha^1)^2]) + B\,[(b-\alpha)^2 + (b^1\beta^1)^2] = o, \text{ oder}$$

$$(Aa - A\alpha)\,\delta\alpha + (Bb - B\alpha)\,\delta\alpha + (Aa^1 - A\alpha^1)\,\delta\alpha^1 + (Bb^1 - B\beta^1)\,\delta\beta^1 = o,$$

eine Gleichung, in welcher die Variationen $\delta\alpha$, $\delta\alpha^{\prime}$, $\delta\beta^{\prime}$, schlechterdings von einander unabhängig sind, und dieß kann nicht anders Statt finden, als wenn der Coefficient einer jeden o ist.

Man erhält also diese drey Gleichungen:

$$\frac{Aa + Bb}{A + B} = \alpha, \quad a^{\prime} = \alpha^{\prime}, \quad b^{\prime} = \beta^{\prime}.$$

Und dieß war es, was bewiesen werden sollte.

187. Dieses Gesetz erstreckt sich, mit den gehörigen Modificationen, auf die Stöße, welche in einem System vollkommen harter, oder auch mit irgend einer beständigen, d. h. für alle Körper des Systems gleichen, Elasticität begabter Körper Statt haben können.

Denn wenn wir voraussetzen, daß $U^{\prime}$ alsdann die durch M verlohrne Geschwindigkeit ausdrücke, so erhält man für den Fall vollkommner elastischer Körper $U^{\prime} = 2U$, und im allgemeinen für irgend einen, durch n ausgedrückten Grad der Elasticität $U^{\prime} = nU$, oder $U = \frac{1}{n}U^{\prime}$. Dieser Werth in die Gleichung $\delta \int MU^2 = o$ substituirt, giebt $\delta \int \frac{1}{n^2} MU^{\prime 2} = o$. Wenn also n

Angenommen, daß die Geschwindigkeit A, beurtheilt nach der Richtung von $\overline{AB}$, der Linie zwischen den beyderseitigen Mittelpuncten, vor dem Stoße a, und nach demselben $\alpha$ sey; daß die von B, nach derselben Richtung geschätzt, vor dem Stoße b, und nach ihm $\beta$ sey; daß ferner die von A, senkrecht auf dieser Mittelpunctslinie geschätzt, vor dem Stoße $a^1$ und nach demselben $\alpha^1$ sey, und daß endlich die von B, ebenfalls senkrecht auf dieser Mittelpunctslinie geschätzt, vor dem Stoße $b^1$ und nach ihm $\beta^1$ sey; so muß, da vermöge unsers Satzes die Bewegung geometrisch seyn muß, so fort $\alpha = \beta$ seyn. Also wird die für A nach $\overline{AB}$ verlohrne Geschwindigkeit $a - \alpha$, und die für B in derselben Richtung verlohrne Geschwindigkeit $b - \beta$, oder $b - \alpha$ seyn.

Ferner wird in der Richtung, welche auf der Mittelpunctslinie senkrecht steht, die von A verlohrne Geschwindigkeit $= a^1 - \alpha^1$, und die von B verlohrne $= b^1 - \beta^1$ seyn; mithin die von A und B verlohrnen Totalgeschwindigkeiten:

$$\sqrt{(a-\alpha)^2+(a^1-\alpha^1)^2} \text{ u. } \sqrt{(b-\alpha)^2+(b^1-\beta^1)^2}$$

Man bekommt also, vermöge des Lehrsatzes:

$$\delta.(A\,[(a-\alpha)^2+(a^1-\alpha^1)^2]) + B\,[(b-\alpha)^2 + (b^1\beta^1)^2] = o, \text{ oder}$$

$$(Aa - A\alpha)\,\delta\alpha + (Bb - B\alpha)\,\delta\alpha + (Aa^1 - A\alpha^1)\,\delta\alpha^1 + (Bb^1 - B\beta^1)\,\delta\beta^1 = o,$$

eine Gleichung, in welcher die Variationen $\delta\alpha$, $\delta\alpha^{I}$, $\delta\beta^{I}$, schlechterdings von einander unabhängig sind, und dieß kann nicht anders Statt finden, als wenn der Coefficient einer jeden o ist.

Man erhält also diese drey Gleichungen:

$$\frac{Aa + Bb}{A + B} = \alpha, \quad a^{I} = \alpha^{I}, \quad b^{I} = \beta^{I}.$$

Und dieß war es, was bewiesen werden sollte.

187. Dieses Gesetz erstreckt sich, mit den gehörigen Modificationen, auf die Stöße, welche in einem System vollkommen harter, oder auch mit irgend einer beständigen, d. h. für alle Körper des Systems gleichen, Elasticität begabter Körper Statt haben können.

Denn wenn wir voraussetzen, daß $U^{I}$ alsdann die durch M verlohrne Geschwindigkeit ausdrücke, so erhält man für den Fall vollkommner elastischer Körper $U^{I} = 2U$, und im allgemeinen für irgend einen, durch n ausgedrückten Grad der Elasticität $U^{I} = nU$, oder $U = \frac{1}{n}U^{I}$. Dieser Werth in die Gleichung $\delta \int MU^{2} = o$ substituirt, giebt $\delta \int \frac{1}{n^{2}} MU^{I2} = o$. Wenn also ...

eine constante Größe, oder dieselbe für alle Körper ist, so erhält man: $\frac{1}{n^2}\,\delta \int M U'^2 = 0$ oder $\delta \int M U'^2 = 0$.

Somit gilt dieser Ausdruck für alle Systeme von Körpern, deren Elasticität dieselbe ist.

Doch bemerke man, daß, da alsdann U zu nU wird, der Körper M mit dieser Geschwindigkeit nU, weniger der Geschwindigkeit U, in entgegengesetzter Richtung zurückspringt. Folglich ist die Geschwindigkeit, mit welcher er zurückspringt, $(n - 1)\,U$; und mithin verhält sich die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße zur relativen vor demselben, wie $n - 1 : 1$; d. h. die Formel $\delta \int M U^2 = 0$ wird immer gelten, aber die Variation muß mit hinzugezogen werden, in der Voraussetzung, daß die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße gleich sey der relativen vor demselben, multiplicirt mit $n - 1$, und in entgegengesetzter Richtung genommen.

Folglich muß bey harten oder weichen Körpern, d. h. wenn $n = 1$, die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße als Null, oder, was auf eins hinauskommt, die Bewegung muß als eine geometrische angenommen werden. Sind die Körper vollkommen elastisch, d. h. ist $n = 2$, so muß [illegible]ve Geschwindigkeit nach dem Stoße der

relativen vor demselben als gleich und in entgegengesetzter Richtung angenommen werden; eben so bey den übrigen.

188. Wenn man annimmt, daß jeder Körper M während einer gegebenen Zeit t den Raum X mit der Geschwindigkeit U durchlaufen habe, so erhält man $U = \frac{X}{t}$. Mithin kann man die Formel durch die Division mit t, welches für alle Körper dasselbe ist, in folgende Gestalt verwandelt werden, $\delta \int MUX = 0$.

Maupertuis nennt in seinem Versuche einer Kosmologie Wirkungsgröße (17.) das Product einer Masse durch ihre Geschwindigkeit und ihren durchlaufenen Weg. Mithin ist MUX eine Wirkungsgröße, woraus das als Grundsatz hervorgeht: daß diejenige Größe, welche zur Hervorbringung einer Veränderung in der Bewegung der Körper erfordert wird, jederzeit ein Minimum sey. Dieser Grundsatz ist als der Ausdruck von dem anzusehen, wofür die vorhergegangene Gleichung der algebraische Ausdruck ist. — Maupertuis gründet dieses Prinzip auf die Endursachen; da aber diese einer willkührlichen Auslegung unterworfen sind, und man sie alles sagen läßt, was einem beliebt, so könnte man keinen strengen Schluß aus ihm ziehen, wenn man es nicht durch einen mathematischen Beweis unterstützte.

nähern,
Es wird
wirkens die
bleiben;
sich einand
stellung der
in einem
nimmt, so
des System
die sich ein
würde, Glei
würde die
der Masse
cirt mit ihrer
geschätzt in
= 0 seyn.

Allein diese der
man so eben
angenommenen
auch die Theile
hart angesehen
Geschwindigkeiten
Fällen. Mithin
Falle, die Summe
ner jeden Masse
ihre Geschwindigkeit,
Bewegungsgröße geschätzt
zu beweisen.

Siebenzehnter Lehrsatz.

Wenn auf ein vollkom
System von Körpern, sie
hart, weich oder elas
Stoß geschieht, so ist:

1) Die Summe der von allen
des Systems verlohrnen
Bewegungsgrößen, wenn man sie nach
Richtung nach dem Stoße

2) Die Summe der Bewegun
sen, welche irgend eine An
Körpern des Systems, nach ei
denen Richtung verlohren hab
der Summe der Bewegung
welche alle übrige Körper des
derselben Zeit und in dersel
gewonnen haben.

3) Die Totalgröße der
Systems, nach irgend e
geschätzt, bleibt diesel
vor.

[illegible] Endlich, wen[illegible]
[illegible] ist, so hat m[illegible]

U cos. U'u = W [illegible]

Substituirt man diese[illegible]
[illegible] die vorige Gleichu[illegible]
daß

∫ M W cos. W'

und dieß ist offenbar
Theil unsers Satzes.

[illegible]. Wir hab[illegible]
[illegible] des
[illegible] gesch[illegible]
[illegible] der Größen
[illegible] nach
[illegible] ganze [illegible]
[illegible] des dritten
[illegible] also wird die [illegible]
[illegible] von einem [illegible]
[illegible] nach irge[illegible]
[illegible] durch den [illegible]
[illegible] mögen be[illegible]
[illegible] mögen [illegible]
einer gewissen Grad ele[illegible]

zung gleich ist der durch denselben umgekehrter Richtung gewonnenen, so ist augenscheinlich, daß die R cos. U^ circ. R eins ist mit der Momente der verlohrnen Bewegung in der Richtung der durch irgend von Körpern des Systems mitgetheilten Bewegung genommen, weniger der Momente von Bewegungsgrößen, in derselben Richtung durch alle übrige hat, und es ist klar, daß dieß der Theil unsers Satzes war.

3) Endlich, weil W aus V und U resultirt, so erhält man (27.)

$$\text{cos. } U^\wedge \text{ cir. R} = W \text{ cos. } W^\wedge \text{ cir. R.} - V \text{ cos. } V^\wedge \text{ cir. R.}$$

Substituirt man diesen Werth von U cos. U^ cir. R. in die obige Gleichung, so wird aus durch eine durchgängige Division mit a und Gleichung:

$$\text{R cos. } W^\wedge \text{cir. R} = \int M V R \text{ cos. } V^\wedge \text{ cir. R.}$$

Formel ist offenbar der algebraische Ausdruck des dritten Theils jenes Satzes. Es war zu beweisen, was bewiesen werden sollte.

1) Denn, da vermöge der Voraussetzung das System vollkommen frey ist, und es mithin weder feste Puncte, noch irgend ein anderes Hinderniß in demselben giebt, so kann man wirklich dem ganzen System eine Bewegung des Umschwunges um die gegebene Achse mittheilen, ohne etwas in der Stellung der Theile dieses Systems gegen einander zu verrücken, und diese Bewegung wird eine geometrische seyn (139.), weil sie nichts an den relativen Geschwindigkeiten verändert. Es sey also u die geometrische Geschwindigkeit, welche für jede Masse M aus dieser geometrischen Bewegung entspringt, und R der Radius ihrer Kreisbewegung, d. h. ihre Entfernung von der gegebenen Achse, so werden sich diese Geschwindigkeiten u offenbar unter einander verhalten, wie die Radien R, d. h. man wird u = a R erhalten, wo a eine constante, oder für alle Körper des Systems die nämliche Größe ausdrückt. Aus der (181.) gefundenen Gleichung ∫ M U u cos. U^u = o, wird also:

$$a \int M U R \cos. U^\wedge \text{cir. } R = 0;$$

d. h. die Summe der Momente des Umschwunges der durch den Stoß um die gegebene Achse verlohrnen Bewegungsgrößen in der Richtung der mitgetheilten Bewegung muß = o seyn, und dieß war der erste Theil unsers Satzes.

2) Weil die durch einen Körper verlohrne

Größe der Bewegung gleich ist der durch denselben Körper in umgekehrter Richtung gewonnenen Bewegungsgröße, so ist augenscheinlich, daß die Größe $\int M U R \cos. U^{\wedge} \text{circ. } R$ eins ist mit der Summe der Momente der verlohrnen Bewegungsgrößen, in der Richtung der durch irgend eine Anzahl von Körpern des Systems mitgetheilten Rotationsbewegung genommen, weniger der Summe der Momente von Bewegungsgrößen, welche man in derselben Richtung durch alle übrige gewonnen hat, und es ist klar, daß dieß der zweyte Theil unsers Satzes war.

3) Endlich, weil W aus V und U resultirt, so erhält man (27.)

$$U \cos. U^{\wedge} \text{cir. } R = W \cos. W^{\wedge} \text{cir. } R. - V \cos. V^{\wedge} \text{cir. } R.$$

Substituirt man diesen Werth von $U \cos. U^{\wedge} \text{cir. } R.$ in die obige Gleichung, so wird aus dieser durch eine durchgängige Division mit a und Versetzung:

$$\int M W R \cos. W^{\wedge} \text{cir. } R = \int M V R \cos. V^{\wedge} \text{cir. } R.$$

und diese Formel ist offenbar der algebraische Ausdruck des dritten Theils jenes Satzes. Es war also bewiesen, was bewiesen werden sollte.

## Erster Zusatz.

194. Es ist klar, daß derselbe Beweis gelten würde, wenn das System, statt der vorausgesetzten vollkommnen Freiheit, sich um eine gegebene feste Achse bewegen müßte; denn alsdann würde man das Moment des Umschwunges auf diese Achsen beziehen, und so ebenfalls auf den obigen Ausdruck kommen. Doch würde dieser Ausdruck nur allein für diese Achse gelten können.

## Zweyter Zusatz.

195. Wir wollen uns die von dem von jedem beweglichen Körper senkrecht auf die Achse des Umschwunges gezogenen Radius Vector beschriebene Ebene, oder vielmehr die Verzeichnung dieser Ebene auf irgend einer, auf dieser Achse senkrecht stehenden Fläche denken, d. i. den Flächenraum, welcher auf ihr zwischen zwey von dem Puncte, in welchem sie von der Achse geschnitten wird, nach den Projectionspuncten dieses Beweglichen gezogenen Radiis Vectoribus eingeschlossen ist. Nennt man $\delta t$ das Zeitelement, und multiplicirt man damit die oben (193.) gefundene Gleichung, so giebt dies:

$$\int M\,W\,dt.\,R\cos.\,W^{\wedge}cir.\,R = \int M\,V\,dt.\,\cos.\,V^{\wedge}\,cir.\,R.$$

Allein es ist klar, daß W d t das Element des

Bogen ist, welchen der bewegliche Körper M durchlaufen haben würde, wenn er frey gewesen wäre; und folglich ist

$$W\,dt\,\cos.\,W\,\hat{}\,cir.\,R.$$

der Weg nach der Richtung des Umkreises geschätzt, dessen Centrum der Punct ist, wo die Ebne von der Achse geschnitten wird, oder, was auf eins hinauskommt, der unendlich kleine Bogen zwischen den beyden Radiis Vectoribus, deren einer dem Anfang, der andre dem Ende des Augenblicks $dt$ entsprechen würde. Aus demselben Grunde ist

$$V\,dt\,\cos.\,V\,\hat{}\,cir.\,R$$

der unendlich kleine Bogen, der zwischen den beyden Radiis Vectoribus eingeschlossen ist, welche, vermöge des Stoßes, der eine dem Anfang, der andere dem Ende des Augenblicks $dt$, wirklich entsprechen.

Dieß vorausgesetzt, so ist klar, daß diese Bogen, durch R multiplicirt, das zweyfache der zwischen von diesen Radiis Vectoribus eingeschlossenen respectiven Ebenen vorstellen. Folglich ist die Summe der Producte aus jeder Masse in die Fläche, welche ihr Radius Vector in einem unendlich kleinen Zeittheile durchstreicht, dieselbe, die sie ohne Stoß gewesen wäre; und da dasselbe für alle Zeittheile Statt findet, so kann man

## Bemerkung.

198. Bis jetzt haben wir das betrach[illegible] was sich beym Stoße der Körper ereignet, di[illegible] einander sich unmittelbar oder durch Dazwischenku[illegible] einer Maschine mittheilen: und da von plötzlic[illegible] Veränderungen die Rede war, so brauchten [illegible] keine Rücksicht auf die bewegenden Kräfte zu n[illegible] welche nur in einem Verlaufe von Zeit e[illegible] merkliche Bewegung hervorbringen können. J[illegible] wollen wir den Zustand des Systems als in [illegible] unendlichen Graden sich verändernd betrachten, [illegible] hier müssen wir auch vom Effect der bewegen[illegible] Kräfte Rechenschaft geben.

[illegible] bewegende Kräfte als unendl[illegible] [illegible] unendlich kleine Grade [illegible] [illegible] [illegible] Körper [illegible] [illegible]

[illegible] . . .

[illegible] Boemcans [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

bliche [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

gen.

[illegible]

[illegible]

man für irgend einen Augenblick der Bewegung jedes Körpers des Systems mit m, seine Geschwindigkeit mit V, die bewegende Kraft mit P, die Geschwindigkeit, die es annehmen würde, wenn man die gegenwärtige Bewegung plötzlich wegdächte, und ihr irgend eine geometrische Bewegung substituirte, mit u, und endlich das Zeitelement mit dt bezeichnet, so erhält man folgende zwey Gleichungen:

$$SmVdV - SmVP\,dt\cos.V^{\wedge}P = o \ldots. (M)$$
$$Smud(V\cos.u^{\wedge}V) - SmuPdt\cos.u^{\wedge}P$$
$$= o.\ (N)$$

Denn 1) ist $Pdt\cos.V^{\wedge}P$ augenscheinlich die Geschwindigkeit, welche die bewegende Kraft P während dt, in der Richtung von V, in m hervorgebracht haben würde, wäre dieser Körper frey gewesen. Ferner ist dV die Geschwindigkeit, die er nach derselben Richtung, während der nämlichen Zeit wirklich erhält. Folglich ist $Pdt\cos.V^{\wedge}P - AV =$ die von m während dt nach der Richtung von V, vermöge des wechselseitigen Einwirkens der Körper auf einander verlohrne Geschwindigkeit. Diese Größe muß man also in der (169.) aufgefundenen Formel $SMUV\cos.U^{\wedge}V = o$ für $U\cos.U^{\wedge}V$ setzen, so wie zugleich m für M. Aus dieser Gleichung wird mithin durch diese Substitution:

11

[illegible]

o,

[illegible]

[illegible] ist.

Kräfte,

[illegible]

[illegible] der [illegible]

ändernden System harter Kö
man sieht, äußerst einfach,
zug, daß sie nur Different
nung enthalten.

Zusatz.

200. Ist Gleichgewicht
schwinden die Glieder der Gl
auch das erste der Gleichung
cirt sich diese, wenn man üb
auf:

$$S\,m\,P.\ u\ \cos.\ u^{\wedge}P$$

welches das allgemeine Prinz
in irgend einem Systeme
m P ist.

Weil u hier jede mögl
schwindigkeit ausdrückt, und
tuellen Geschwindigkeiten geom
daß wir für u jede virtuelle
men können.

Sodann kann auch m P
F vorstellen, und die Gleich
folgender Gestalt erscheinen:

$$S\,F.\ u\ \cos.\ u^{\wedge}F =$$

wo ,u die virtuelle Geschwin
drückt. Nun aber ist klar,



$$S \int m\, P\, ds \cos. ds^{\wedge}P - \tfrac{1}{2} S\, m\, V'^2 = 0;$$

weil in diesem Falle die anfängliche Geschwindigkeit als 0 angenommen ist, und übrigens P dieselbe bleibt, wie im ersten Fall. Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, und reducirt sie, so erhält man:

$$S\, m\, V^2 = S\, m\, K^2 + S\, m\, V'^2. \quad (P)$$

Dieß war es, was bewiesen werden sollte.

## Erster Zusatz.

204. Wenn die bewegende Kraft P = 0 ist; d. h. wenn das System von keiner bewegenden Kraft in Bewegung gesetzt wird, und jeder Körper keine andere Veränderung erleidet, als durch die Stärke der Drähte, vermöge welcher die verschiedenen Theile des Systems auf einander hin- und zurückwirken: so wird das erste Glied der vorigen Gleichung (N° 193.) = 0. Dieß giebt also: $V'^2 = 0$, und man erhält aus der Formel (P) $S\, m\, V^2 = S\, m\, K^2$; d. h. die Summe der lebendigen Kräfte wird constant bleiben, wie wir es (177.) schon gefunden haben.

## Zweyter Zusatz.

205. Wird die Kraft P durch eine sich wechselseitig aufhebende Bewegung unter den verschiedenen

Körpern des Systems, oder durch gewisse auf diesen Körpern befindliche fixe Puncte hervorgebracht worden, das Gesetz dieser Anziehung möchte auch übrigens seyn, welches es wollte, wenn es sich nur nach den Entfernungen richtete; so ist klar, daß die aus dieser Anziehung, zwischen je zweyen diesen Körpern in jedem Augenblicke entspringende lebendige Kraft gleich seyn würde dem Producte aus der Summe ihrer Massen, eine jede multiplicirt mit der anziehenden Kraft, die auf sie wirkt, und das Ganze multiplicirt durch die Größe, mit welcher sich die Körper während dieses Augenblicks einander nähern würden. Folglich, da sich diese anziehende Kraft in gleichen Entfernungen nach der Voraussetzung als dieselbe finden würde, so muß auch die durch sie zwischen zwey Körpern hervorgebrachte lebendige Kraft sich immer wieder als dieselbe finden, wenn diese Körper wieder in gleicher Entfernung von einander sind, welchen Weg auch jeder sonst für sich insbesondere genommen haben möge. Die in dem allgemeinen Systeme entstehende lebendige Kraft hängt also weder von dem Wege, den jeder Körper insbesondere nimmt, noch von der Zeit, in welcher er ihn durchläuft, sondern einzig von der Lage ab, in welcher er sich in Rücksicht auf die übrigen Körper des Systems befindet. Mithin wird diese lebendige Kraft immer auf gleiche Weise wachsen, wenn die Körper von einer gegebenen Lage ausgegangen und bis zu einer andern gegebenen gekommen sind. Und dieses Wachsen wird 0 seyn, d. h. die Summe der le-

bendigen Kräfte am Ende der Bewegung wird mit der des ersten Augenblickes zusammenfallen, wenn sich die Körper wieder in ihrer ursprünglichen Lage befinden.

## Dritter Zusatz.

Theilten sich die Körper ihre Einwirkungen auf einander durch Maschienen mit Federkraft mit, und hienge der Druck dieser Federn bloß von ihrer stärkern oder schwächern Zusammenziehung, und nicht von zufälligen Ursachen ab, wie z. B. die Temperatur ist, so würde die durch eine jede Feder hervorgebrachte lebendige Kraft bloß von der Größe, um die sie sich dilatirt, keinesweges aber von der darauf verwandten Zeit abhängen. Denn die durch ihren Druck in jedem Augenblicke erzeugte Größe der lebendigen Kraft, sie mag sich übrigens befinden, in welcher Lage sie will, ist das Product dieses Druckes in dem unendlich kleinen Weg, welche ihre äußersten Enden zurücklegen, um sich von einander zu entfernen. Die lebendige Kraft des Systems wird folglich immer in gleichem Grade gewachsen seyn, wenn jede Feder von einem gegebenen Grade der Zusammenziehung aus, einen beliebigen andern, ebenfalls gegebenen Zustand der Zusammenziehung erreicht haben wird. Mithin wird diese Vermehrung o seyn, d. h. die Summe der lebendigen Kraft wird die nämliche seyn, wenn sich die Federn am Ende der Bewegung in dem

nämlichen Zustande der Zusammendrückung befinden, wie im ersten Augenblicke.

## Vierter Zusatz.

206. Wären nun Federn, deren Druck einzig von den Graden ihrer Zusammenziehung abhienge, und anziehende oder abstoßende Kräfte zugleich vorhanden, welche sich in dem Verhältnisse von irgend einer Art von Functionen der Entfernungen äußerten, so würde die nach einem gewissen Zeitverlauf Statt habende Vermehrung oder Verminderung der lebendigen Kräfte ebenfalls bloß abhängen von dem Grade der Zusammenziehung dieser Federn, und von den Entfernungen der Körper des Systems von einander, aber keinesweges von der absoluten Lage der einen gegen die andern, noch von den Wegen, die sie etwa nahmen, um in ihre neuen Lagen zu kommen; so daß, wenn diese Lagen der Körper und Federn wieder die nämlichen geworden wären, wie im ersten Augenblicke der Bewegung, das Zu- oder Abnehmen der lebendigen Kraft o seyn würde.

## Fünfter Zusatz.

207. Wenn die bewegende Kraft P sowohl ihrer Intensität, als auch ihrer Richtung nach eine constante Größe ist; wie z. B. die gewöhnliche Schwere auf der Oberfläche der Erde, welche

ist g immer ... so wird auf der Grund (M) (100) wenn man in Bezug auf f integrirt:

$$g \int m \, ds \cos. ds^{\wedge} g = \frac{1}{2} S m V^2$$

Nun ist es klar, daß, wenn man h die Höhe nennt, um welche das Körperchen m in t Zeit herabgefallen ist, sich immer ergiebt

$$ds \cos. ds^{\wedge} g = dh.$$

Mithin wird der Grundsatz:

$$g S \int m \, dh - \frac{1}{2} S m V^2 + C = 0$$

$$\text{oder } g S m h - \frac{1}{2} S m V^2 + C = 0.$$

## Specieller Zusatz.

208. Bezeichnet man aber mit M die ganze Masse des Systems, und mit H die Höhe, um welche der Schwerpunkt herabgesunken ist, so erhält man (144) $S m . h = M H$. Mithin giebt dieß:

$$g M H - \frac{1}{2} S m V^2 + C = 0,$$

wo C die Hälfte der anfänglichen lebendigen Kraft ausdrückt. Angenommen also, daß K die anfängliche Geschwindigkeit von m sey, so bekommt man $C = \frac{1}{2} S m K^2$, und die Gleichung wird:

$$g M H - \frac{1}{2} S m V^2 + \frac{1}{2} S m K^2 = 0,$$

oder wenn man mit 2 multiplicirt, und versetzt:

$$S m V^2 = S m K^2 + 2 g . M H.$$

das heißt, in jedem Systeme schwerer Körper, die unmittelbar auf einander einwirken, aber ihre Bewegung in unmerklichen Graden verändern, ist die Summe der lebendigen Kräfte nach einer jeden beliebigen Zeit gleich der Summe der anfänglichen lebendigen Kräfte, plus dem doppelten Gewichte (gM) des ganzen Systems, multiplicirt mit der Höhe, um welche der Schwerpunct während dieser Zeit herabgekommen ist.

## Siebenter Zusatz.

209. $V'$ sey die Geschwindigkeit, welche ein von der Höhe H ungehindert herabfallender Körper erhalten würde, und welche man die von der Höhe H herrührende Geschwindigkeit nennt: so erhält man:

$$V' dV' = g dH,$$

oder wenn man integrirt und annimmt, daß die anfängliche Geschwindigkeit o sey, so giebt dieß $\frac{1}{2} V'^2 = g H$, oder wenn man mit 2 M multiplicirt, $2 g M H = V'^2$. Substituirt man diesen Werth $2 g M H$ in die Gleichung des vorigen Zusatzes, so erhält man:

$$S m V^2 = S m K^2 + M V'^2,$$

d. h. in jeder durch Gewichte getriebenen Maschiene, deren Bewegung sich in unmerklichen Graden verändert, ist die Summe der lebendigen Kräfte nach Verlauf irgend einer gegebenen Zeit gleich der

## Dreyundzwanzigster Lehrsatz.

214. Wenn ein System von Körpern seine Bewegung in unmerklichen Graden verändert, und durch eine Stellung hindurch geht, in welcher sich die bewegenden Kräfte für sich allein wechselseitig das Gleichgewicht halten würden; so wird die Summe der lebendigen Kräfte in diesem Zeitpuncte ein Minimum, oder ein Maximum seyn.

Denn die Gleichung (M) (199.) giebt:

$$S m VP\, dt \cos V^{\wedge}P = S m V dV.$$

Aber V ist eine geometrische Geschwindigkeit (153.). Also ist, bey vorhandenem Gleichgewicht, das erste Glied (200.) dieser Gleichung o. Für den Fall des Gleichgewichts also erhält man:

$$S m V dV = 0, \text{ oder } d S m V^2 = 0,$$

mithin ist $S m V^2$ ein Minimum oder Maximum. Hierinnen besteht das von Courtivron aufgestellte Gleichgewichtsprincip.

## Vierundzwanzigster Lehrsatz.

215. Wenn sich mehrere, von verschiedenen bewegenden Kräften angetriebene Körper wechselseitig das Gleich-

gewissen Falles, und man nun dem System irgend eine geometrische Bewegung mittheilt, so ist die Summe der Producte aus jeder bewegenden Kraft, multiplicirt durch seine geometrische Geschwindigkeit, nach der Richtung dieser Kraft geschätzt, = Null.

Dieß ergiebt sich augenscheinlich aus der ([illegible]) aufgefundenen Formel (N); denn dann ist nämlich der Voraussetzung V = 0, mithin reducirt sich das erste Stück dieser Gleichung auf 0, und folglich, wenn man mit d t dividirt, auf

$$S\, m P.\, u \cos \text{[illegible]} = 0,$$

welches genau der algebraische Ausdruck des behaupteten Satzes ist. Q. E. D.

## Erster Zusatz.

216. Der Werth jeder beliebigen Kraft des Druckes, wie sie z. B. Menschen, Thiere, Springfedern rc. ausüben, kann durch eine bewegende Kraft, wie ein Gewicht, ausgedrückt werden. Ferner haben wir (16[illegible].) gesehen, daß jede virtuelle Geschwindigkeit einer geometrischen Bewegung zugehört; und so folgt aus dem vorigen Lehrsatz dieser, d. i. das bekannte Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten:

Dreyund[illegible]

214. W[illegible]mum, d. h. wenn meh-
[illegible] oder gegen gegebene fixe
[illegible] Bewegungskräften und Function-
[illegible] in Bewegung gesetzten Kör-
[illegible] angebracht werden; so tritt
[illegible] alsdann ein, wenn die Summe
[illegible] aus den bewegenden Kräften in die
[illegible] der Körper, welche durch sie nach
[illegible] die sie anziehen, getrieben werden,
[illegible] Maximum oder Minimum ist.

[illegible] würde auf gleiche Weise Statt fin-
[illegible] sich die Anziehung zwischen den, ob-
[illegible], Körpern des Systems selbst
[illegible] der Voraussetzung, daß p alsdann
[illegible] von einander bedeutete, weil,
[illegible] je zwey und zwey, immer
[illegible] entgegengesetzten Wirkung und Gegen-
[illegible] die Größe S m P d p sichtlich immer
[illegible] wie oben. Dieß ist das Prinzip,
[illegible] Maupertuis unter dem Namen des
[illegible] der Ruhe gab, und wir werden am
[illegible] Werkes wieder darauf zurück kommen.

## Vierter Zusatz.

215. Der obige behauptete Lehrsatz läßt sich
auch auf den Fall der Bewegung anwenden; denn
[illegible] zerlegt sich die Bewegung, mit welcher
[illegible] Punkt zu bewegen strebt, in zwey, de-
[illegible], und die nachfolgende Bewegung

bewirkt, die andere aber aufgehoben wird. Nun aber war diese aufgehobene Bewegung dem durch den obigen Lehrsatz ausgesprochenen Gesetze unterworfen (169. 190.); d. h. „der Zustand der Ruhe, oder der Bewegung irgend eines Systems von Kräften, die an einer Maschiene angebracht sind, sey, welcher er wolle, so ist, wenn man dasselbe mit einemmal eine geometrische Bewegung annehmen läßt, ohne diese Kräfte zu verändern, die Summe der Producte aus jeder Kraft in die Geschwindigkeit, welche der Punct, an welchem sie angebracht ist, im ersten Augenblicke haben wird, geschätzt in der Richtung dieser Kraft, = 0".

Vielleicht ist es nicht ganz unnütz, einem Einwurfe zu begegnen, der sich im Kopfe derjenigen bilden könnte, welche auf den eigentlichen Sinn des Wortes „Kraft" nicht ganz aufmerksam gewesen sind. „Wir wollen uns, z. B." hör' ich sie sagen, "eine Rad- und Zylinderwelle vorstellen, von welcher Gewichte an vertikalen Stricken herabhängen mögen: so wird sich, bey vorhandenem Gleichgewicht, oder gleichförmiger Bewegung, das an dem Rade befestigte Gewicht zu dem an dem Zylinder befestigten, verhalten, wie der Radius des Zylinders zu dem des Rades. Doch dieß gilt nicht mehr, wenn die Maschiene eine beschleunigte oder verzögerte Bewegung annimmt; es scheint also, daß alsdann die Kräfte nicht mit ihren Geschwindigkeiten in der Richtung

dieser Kräfte geschätzt, im wechselseitigen Verhältnisse stehen, wie dieß doch aus dem Satze folgen sollte". — Darauf dient zur Antwort, daß im Fall einer ungleichförmigen Bewegung die genannten Gewichte nicht die einzigen Kräfte sind, welche sich im Systeme äußern; denn weil die Bewegung jedes Körpers sich ununterbrochen verändert, so setzt er auch vermöge seiner Trägheit dieser Veränderung seines Zustandes in jedem Augenblicke einen Widerstand entgegen: wir müssen daher diesen Widerstand mit in Rechnung bringen. Die durch die Körper ausgeübten Kräfte sind also nicht allein ihre Gewichte, sondern auch die durch diese Körper verlohrnen Bewegungsgrößen, die sich nach der Spannung der Seile bestimmen müssen, an welchen sie aufgehangen sind. Nun aber erhält sich (die Maschiene befinde sich in Ruhe, oder Bewegung, und diese sey gleichförmig oder nicht) die Spannung des an dem Rande zu der Spannung des an dem Zylinder befestigten Seiles, wie der Radius des Zylinders zum Radius des Rades: d. h. diese Spannungen, welche die wahren, durch die Körper sich äußernden Kräfte, die wahren, sich wechselseitig aufhebenden Bewegungsgrößen sind, verhalten sich immer, wie die Geschwindigkeiten dieser Körper; und dieß stimmt mit unserm Satze überein.

## Fünfter Zusatz.

220. Lassen sich die Kräfte, welche um eine

Maschiene herum sich im Gleichgewicht befinden, auf zwey zurückbringen, so ist, die dem Systeme mitgetheilte geometrische Bewegung möge seyn, welche sie wolle, zufolge des Lehrsatzes klar, daß die eine Kraft sollicitiren, die andere widerstehen wird; d. h. die eine wird mit der Richtung ihrer Geschwindigkeit einen spitzen, die andere aber mit der ihrigen einen stumpfen Winkel bilden; denn das Product der einen, in ihre Geschwindigkeit, in der Richtung dieser Kraft geschätzt, ist das Product derselben Kraft, in den Cosinus des Winkels, den sie mit ihrer Geschwindigkeit bildet (26.). Mithin kann die Summe dieser beyden Producte nur dann o werden, wenn ein Cosinus negativ ist, d. h. nicht anders, als wenn der eine Winkel spitz, der andere stumpf ist.

## Sechster Zusatz.

221. Wir wollen uns ein System von Körpern vorstellen, welche, von beliebigen bewegenden Kräften bewegt, an eine Maschiene angebracht sind; m heiße jede Masse des Systems, u ihre Geschwindigkeit, k die anfängliche Geschwindigkeit, p die beschleunigende Kraft von m, wenn sie sollicitirend, p' wenn sie widerstrebend ist, und d t das Zeitelement. Nach Verlauf einer gewissen gegebenen Zeit wird also:

$$\int dt\, S\, m\, p\, u \cos. \hat{p\,u} - \int dt\, S\, m\, p'\, u \cos. \hat{p'\,u} = \tfrac{1}{2} S\, m\, u^2 - \tfrac{1}{2} S\, m\, k^2.$$

Aber das erste Glied [illegible] so bekommt
das durch alle sollicitiren [illegible]
tigkeitsmoment, und da [illegible]
widerstrebenden Kräfte a [illegible] $= o$.
tigkeit. Angenommen [illegible] an den
M, M' seyen, so wird [illegible] gewissen
chung:

$$M - M' = \frac{1}{2} S m \text{ [illegible] } \cos.$$

und da $u^2$, als Quadrat, [illegible]
kann $S m u^2$ niemals negativ [illegible] das
also $k = o$ an, so erhält [illegible] der
$M > M'$; wir können folglich [illegible]
setzen:

„die an einem beliebigen, [illegible]
denden, Systeme von Körp [illegible]
genblick der Bewegung angeb [illegible]
gen seyn, welche sie wollen [illegible]
das nach Verlauf einer gegeben [illegible]
sollicitirenden bewegenden Kräfte [illegible]
tigkeitsmoment größer, als das [illegible]
durch die widerstrebenden bewege [illegible]
sorbirte Thätigkeitsmoment.

Hieraus folgt z. B., daß, man [illegible]
einer im ersten Augenblicke ruhigen [illegible]
wichte anbringen, auf welche Art [illegible]
wird es doch unmöglich seyn, daß [illegible]
punct des Systemes in die Höhe [illegible]
wenn man das System sich selbst über [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$= \frac{dV}{dt}$ in drey andere

$\frac{dV'}{dt}, - \frac{dV''}{dt}$ und $- \frac{dV'''}{dt}$, die auch

... diesen Achsen parallel sind, so kann ... Grundsatz der virtuellen Geschwindigkeiten ... allgemeine System von Kräften anwen... wenn man in der Richtung einer jeden von ... einen fixen Punct annimmt, und sodann die ... der Producte aus jeder von ihnen in die ... von diesem Abstande = o macht.

... können wir, da diese fixen Puncte ... sind, sie alle in den drey fixen Ebnen ... annehmen, in welchen die Achsen liegen, ... die man diese Bewegung bezieht. Und somit ... der in der Richtung von x gehenden ..., als an dem Puncte angebracht gedacht ..., wo ihre Richtung die fixe Ebene von ... z schneidet; so auch die übrigen. Folg... erhalten wir, vermöge des Grundsatzes der ... Geschwindigkeiten:

$$\ldots \delta x + P'' \delta y + P''' \delta z) - S m \left( \frac{dV'}{dt} \delta x + \frac{dV''}{dt} \delta y + \frac{dV'''}{dt} \delta z \right) = o,$$

... mit dem Obigen auf eins hinaus.

Für den Fall des Gleichgewichts reducirt sich diese Gleichung augenscheinlich auf:

$$Sm(P' \delta x + P'' \delta y + P''' \delta z) = 0.$$

235. Ich werde eingebildete oder fingirte Lage (position fictive) des Puncts m diejenige nennen, wo er sich befinden würde, wenn er statt dx, dy, dz, zu gleicher Zeit in der Richtung von x, y und z zu durchlaufen, δx, δy und δz durchliefe, und den Abstand seiner wirklichen Lage von seiner eingebildeten werde ich die Variante dieses Puncts heißen. Diese Variante wird folglich $\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$ seyn, indeß das Element des wirklich beschriebenen Bogens $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ist.

236. Wir wollen dieß annehmen, und uns vorstellen, daß das System von einer gegebenen Lage, welche ich mit (A) bezeichnen will, ausgehe, um zu einer andern, durch (B) bezeichneten, zu gelangen. Es möge ferner jetzt unendlich wenig von dieser Bahn abgewichen seyn, und auf seinem neuen Wege durch die, von mir eben so genannte eingebildete Lage gehen. Die dieser Lage entsprechenden δx, δy und δz werden alsdann das seyn, was man im Variationscalcul Variationen von x, y und z nennt. Die Variation δs der Curve muß man wohl von dem unterscheiden, was ich oben die Variante nenne;

so [illegible] die Varia-

$dx^2 + dy^2 dz^2$,

[illegible] ist. Und benennt [illegible], so ist nach (118.)

$$= dx\,\delta x + dy\,\delta y + [illegible]\,\delta z, \text{ oder}$$

$$= V^{I}\,\delta x + V^{II}\,\delta y + V^{III}\,\delta z$$

[illegible]:

$$= P^{I}\,\delta x + P^{II}\,\delta y + P^{III}\,\delta z.$$

[illegible] nehme an, daß p der Abstand [illegible] von einem in der Richtung der [illegible] fixen Puncte sey, so, daß [illegible] fixen Punct anziehend ansehen [illegible] folglich d p die Größe, um [illegible] Körper m von diesem fixen Puncte [illegible] diejenige, um welche er sich [illegible] entfernen würde, wenn er $\delta x$, [illegible] Richtung von x, y und z, [illegible] und d z durchliefe; unter diesen [illegible] nach (11.) klar, daß:

$$[illegible] + P^{III}\,dz = - P\,dp$$

$$[illegible] + P^{III}\,\delta z = - P\,\delta p$$

Mithin können die obigen Formeln (233.) folgende Gestalt annehmen:

$$2\,S\,m\,P\,dp + S\,m\,d.\,V^2 \ldots$$ [illegible]

$$S\,m\,P\,\delta p + S\,m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) = 0.$$

238. In diesen Gleichungen [illegible] P als eine einzige, [illegible] als eine, die aus allen denen, [illegible] bracht sind, resultirt; [illegible] durch die bewegende Kraft [illegible] momente sind, und [illegible] andern resultirenden [illegible] gleich ist der Summe [illegible] consumirten Zwangskräften [illegible] folgt, daß, wenn [illegible] m P mehrere u. s. w. [illegible] auf deren Richtungen [illegible] werden, [illegible] m entfernt [illegible] ankommen [illegible].

2 S m [illegible]

S m [illegible]

dem diese war: $\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$; die Variation $\delta s$ hingegen ist $\delta \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, welches ein großer Unterschied ist. Und benennt man diese Variante mit $\delta s$, so ist nach (118.) klar, daß man erhält:

$$ds\, \delta s \cos. ds^\wedge \delta s = dx\, \delta x + dy\, \delta y + dz\, \delta z, \text{ oder}$$

$$V \delta s \cos. V^\wedge \delta s = V' \delta x + V'' \delta y + V''' \delta z$$

und auf gleiche Weise:

$$P \delta s \cos. P^\wedge \delta s = P' \delta x + P'' \delta y + P''' \delta z.$$

127. Man nehme an, daß $p$ der Abstand des Körpers $m$ von einem in der Richtung der Kraft $P$ angenommenen fixen Puncte sey, so, daß man ihn als diesen fixen Punct anziehend ansehen könne. Es sey folglich $dp$ die Größe, um welche sich der Körper $m$ von diesem fixen Puncte entfernt, und $\delta p$ diejenige, um welche er sich von demselben entfernen würde, wenn er $\delta x$, $\delta y$ und $\delta z$ in der Richtung von $x$, $y$ und $z$, anstatt $dx$, $dy$ und $dz$ durchliefe; unter diesen Voraussetzungen ist nach (12.) klar, daß:

$$P' dx + P'' dy + P''' dz = - P dp$$

$$P' \delta x + P'' \delta y + P''' \delta z = - P \delta p$$

$$+ Sm\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = 0 \quad (N''')$$

239. Dem letzten Gliede der (234. und 238.) gefundenen Formeln ($N''$), ($N'''$), läßt sich eine merkwürdige Gestalt [illegible]n; denn wenn man die Größe $dx\,\delta x + dy$ [illegible] $+ dz\,\delta z$ differenziren, so bekommt man:

$$d\,(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z) = (d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z) + \tfrac{1}{2}\delta\,(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

oder, wenn man transponirt und mit $dt^2$ dividirt:

$$\frac{d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z}{dt^2} = \frac{d\,(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)}{dt^2} - \frac{\delta\,(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{2\,dt^2} \quad (N^v)$$

oder, weil $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$,

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z = \frac{d\,(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)}{dt^2} - \frac{\delta\,ds^2}{2\,dt^2}.$$

[illegible]

[illegible]

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + [illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

Man [illegible]

240. Man multiplicire die Gleichung (M***) mit dt, und integrire in Bezug auf t, um den Zustand der Bewegung des Systems nach Verlauf einer gegebenen Zeit zu finden, so erhält man:

$$+ S m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right)$$
$(N^{IIII})$

239. Dem letzten Gliede der (234. un
gefundenen Formeln $(N^{III})$, $(N^{IIII})$,
eine merkwürdige Gestalt geben; denn m
die Größe $dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z$
zirt, so bekommt man:

$d\,(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z) = ($
$d^2 y\,\delta y + d^2 z\,\delta z) + \frac{1}{2}\delta\,(dx^2 + d$

oder, wenn man transponirt und m
dirt;

$$\frac{d^2 x\,\delta x + d^2 y\,\delta y + d^2 z\,\delta z}{dt^2}$$
$$= \frac{d\,(dx\,\delta x + dy\,\delta y +}{dt^2}$$
$$- \frac{\delta\,(d^2 x + dy^2}{2\,dt^2}$$

oder, weil $dx^2 + dy^2 + dz^2 =$

$$\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\delta z$$
$$= \frac{d\,(dx\,\delta x + dy\,\delta y + d}{dt^2}$$

$\int dt\, Sm\, (P^{I} \delta x + P^{II} \delta y$

$= S m\, \frac{dx\, \delta x +}{}$

$- \frac{\delta \int S m d s^{2}}{2\, dt}$

Nimmt man an, daß di
für den ersten Augenblick ge
man für diesen ersten Augenblic
$\delta z = 0$. Mithin wird auch
o seyn.

Nimmt man ferner an,
Systems für den letzten Augenb
ben sey, so bekommt man auch
blick $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta$
sich das erste Stück des zweyt
reducirt.

241. Mithin wird sich, wer
des Systems für den ersten und d
blick gegeben annimmt, die Fo
tiplication mit $dt$ auf folgende r

$dt \int dt\, S m\, (P^{I} \delta x + P^{II} \delta$
$+ \delta \tfrac{1}{2} \int S m d s$

oder: $dt \int dt\, S m\, (P^{I} \delta x + P^{I}$
$+ \int S m d s d \delta s$

oder wenn man mit $dt$, das als

ziehende Kräfte sind, welche gewissen Functionen der Abstände proportionirt wirken, findet man auch für den Fall der Bewegung eine, in so fern merkwürdige Formel, als sie unabhängig ist von den bewegenden Kräften.

Wirklich haben wir (205.) gesehen, daß alsdann der Thätigkeitsmoment, welcher durch die bewegenden Kräfte consumirt wurde, um das System aus einer gegebenen Lage in eine andere, gleichfalls gegebene, zu bringen, immer derselbe bleibt, die von jedem Körper genommene Bahn sey, welche sie wolle. Folglich differirt der Thätigkeitsmoment, welcher durch das System consumirt wurde, damit dieß aus der gegebenen Lage (A) in seine gegenwärtige gelangen konnte, von demjenigen, welchen er consumiren mußte, wenn er in seine eingebildete Lage (position fictice) kommen sollte, um so viel, als er consumiren müßte, wenn er directe aus seiner gegenwärtigen Lage in seine eingebildete übergehen sollte; d. i. um $S\, m\, (P^{I}\, \delta x + P^{II}\, \delta y + P^{III}\, \delta z)$.

Auf der andern Seite ist der Thätigkeitsmoment, welcher consumirt wurde, um das System aus der Lage (A) in seine gegenwärtige zu bringen, gleich der Hälfte der Zunahme der lebendigen Kräfte von der ersten Lage zur zweyten; und der Thätigkeitsmoment, welcher consumirt werden mußte, wenn das System in seine fingirte Lage übergehen sollte, ist ebenfalls gleich der Zunahme an

lebendigen Kräften, welche Statt haben würde, wenn sich das System aus seiner gegebenen Lage (A) in jene begeben hätte, statt sich in seine gegenwärtige Lage zu begeben. Folglich ist der Unterschied dieser beyden Thätigkeitsmomente gleich der Veränderung $S m V \delta V$ der lebendigen Kraft. Mithin hat man $S m V \delta V = S m (P^{I} \delta x + P^{II} \delta y + P^{III} \delta z)$. Diese Formel würde offenbar auch dann gelten, wenn auch das System von einer andern Lage ($A^{I}$), als der gegebenen (A), ausgienge; wenn nur die Summe der lebendigen Kräfte in beyden Lagen (A), ($A^{I}$), gleich wäre, weil alsdann der Thätigkeitsmoment, welcher consumiret werden muß, um aus (A) in ($A^{I}$) zu kommen, und welcher immer durch den halben Unterschied der lebendigen Kräfte in beyden Lagen ausgedrückt wird, = o seyn würde.

Angenommen also, daß diese Summe von lebendigen Kräften für den ersten Augenblick wirklich gegeben sey, und daß man für das zweyte Glied der nach dieser Voraussetzung vorhin gefundenen Gleichung seinen, aus der weiter oben gefundenen (239.) Gleichung ($n^{III}$) genommenen Werth setze, so ist:

$$S m V \delta V = d S m \frac{dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z}{dt^2} - \delta S m \, ds^2.$$

Man multiplicire alles mit $dt$, bemerke, daß

$V\,dt = ds$, versetze den letzten Ausdruck in das erste Glied, und reducire, so giebt dieß:

$$\delta\, S\, m\, V\, ds = d\, S\, m\, \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{dt} \quad \ldots.\ (P)$$

und diese Gleichung ist von den bewegenden Kräften schlechterdings unabhängig.

245. Integrirt man diese Gleichung in Bezug auf d, um den Zustand der Bewegung nach einer gegebenen Zeit zu wissen, so erhält man:

$$\delta\, S\, m \int V\, ds = S\, m\, \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{dt} + \text{const.}$$

Nimmt man, wie oben (241.), die Lage des Systems für den ersten Augenblick als gegeben an, so bekommt man für diesen ersten Augenblick $\delta x = 0$, $\delta y = 0$ und $\delta z = 0$; mithin ist auch die Constante $= 0$.

Nimmt man ferner die letztere Lage des Systems auch als gegeben an, so wird für diese letzte Lage [illegible] $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, und $\delta z = 0$; folglich [illegible] Glied der Gleichung verschwinden [illegible] $\delta\, S\, m \int V\, ds = 0$. [illegible] wird ein Mi[illegible] Maximum seyn.

In dieser Formel ist nun das berühmte Prinzip der kleinsten Wirkung, wenn die Bewegung sich in unmerklichen Graden verändert, enthalten. Und dieses Prinzip lautet, wie es la Grange in seiner Mechanik aufgestellt hat, folgendermaßen:

„Bey jeder Bewegung eines Systems von Körpern, welche durch wechselseitig anziehende, oder nach gewissen fixen Mittelpuncten hin strebende Kräfte bewegt werden, und gewissen Functionen der Abstände proportionirt sind, sind die durch die verschiedenen Körper und ihre Geschwindigkeiten beschriebenen Curven nothwendig so beschaffen, daß die Summe der Producte aus jeder Masse in das Integral der Geschwindigkeit, multiplicirt mit dem Element der Curve, ein Maximum oder ein Minimum ist, wofern man nur die ersten und die letzten Puncte jeder Curve als gegeben ansieht".

Die Größe $Sm\int Vds$, welche ein Minimum ist, ist eins mit $Sm\int V^2dt$ oder mit $\int dtSmV^2$; folglich wächst diese Größe in jedem Augenblicke $dt$ um $dtSmV^2$, und diese Größe ist nichts anders, als die gesammte lebendige Kraft des Systems, multiplicirt durch diesen Augenblick, d. h. die als ein Minimum sich findende Größe ist die Sammlung der Producte der lebendigen Kraft, welche in jedem Augenblick diesen Augenblick selbst hindurch Statt hat.

Nun aber war nach (201.) $SmV^2 = 2\int mVPdt \cos. V^\wedge P$, folglich: $dt\,SmV^2 = 2\,dt\int mVP\,dt \cos. V^\wedge P$, d. h. die Größe $dt\,SmV^2$, wovon das Integral ein Minimum ist, ist nichts anders (64.), als das Doppelte der Größe von Action, welche während dt von allen bewegenden Kräf[illegible]ufgewendet wurden, um das S[illegible] zu bringen. Mithin ist die [illegible], welche ein Minimum ist, ein[illegible] $2\int d$[illegible]$mVPdt \cos. P^\wedge V$; d. h. noch einmal so [illegible]ß, als die Quantität von Action, welche von [illegible]len bewegenden Kräften des Systems aufgewendet [illegible]urden, um es aus einer gegebenen Lage in ein[illegible] andere gegebene Lage zu bringen. Daher schreibt sich der, der oben gefundenen Formel beygelegte Nahme: Prinzip der kleinsten Wirkung. Jener Aufwand von Quantität der Action also scheint sich die Natur bey den, von ihr hervorgebrachten Veränderungen zu ersparen, und in dieser Hinsicht glaubten viele Gelehrte, den erwähnten Grundsatz als ein Resultat von den Caussis finalibus oder den Endursachen ansehen zu dürfen.

Wir haben (200.) gesehen, daß man für den Augenblick, wenn das System durch die Lage des Gleichgewichtes hindurch geht, $SmVPdt \cos. P^\wedge V = 0$ erhält; und folglich, wenn man mit dt multiplicirt:

$$dt\,SmVPdt \cos. P^\wedge V = 0;$$

d. h. die Quantität von Kraft, welche alle Theile des Systems binnen der Zeit, in welcher dasselbe durch die Lage des Gleichgewichts hindurch geht, erwerben, ist = 0. Und so wird aus derselben Größe, welche im Fall des Gleichgewichts = 0 ist, ein Maximum, für den Fall der Bewegung.

246. Aus der Formel (P) (244.) kann man noch andere wichtige Folgerungen ziehen; denn da $ds^2$ eins ist mit $dx^2 + dy^2 + dz^2$, so erhellt allerdings fürs erste, daß man diese Formel auch so ausdrücken kann:

$$\delta S m (V' dx + V'' dy + V''' dz) = d S m (V' \delta x + V'' \delta y + V''' \delta z) \quad (P')$$

eine Gleichung, in welcher die Buchstaben $d$ und $\delta$ schlechterdings eine und dieselbe Rolle spielen.

247. Führt man die angegebenen Operationen aus, so erhält man:

$$S m (dx\,\delta V' + V' \delta dx + dy\,\delta V'' + V'' \delta dy + dz\,\delta V''' + V''' \delta dz)$$
$$= S m (\delta x\,dV' + V' d \delta x + \delta y\,dV'' + V'' d \delta y + \delta z\,dV''' + V''' d \delta z),$$

oder, da man, nach den Grundsätzen des Variationskalkuls, die Ordnung der Buchstaben $d$, $\delta$, umkehren kann, so erhellt, daß das 2te, 4te und 6te Stück des ersten Gliedes das 2te, 4te und 6te Stück des zweiten Gliedes respective aufheben.

... man ... Form ...

... der ...

... einer gegebenen ... zu wissen

$$\ldots + z\,d\,V''')$$

$$\ldots V'' + z\,d\,V''') + C$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] Abstraction wurde gemacht, um sich die [illegible]ung des speciellen Verhältnisses zu erleich[illegible] zwischen den Kräften Statt findet, welche [illegible] äußerlich an eine Maschiene angebracht [illegible], deren Gestalt mehr oder weniger verwickelt [illegible] kann.

Indeß ist bey aller Verwickelung der Maschie[illegible]n doch leicht zu bemerken: daß man sie immer [illegible]s eine Zusammensetzung von einer Menge Kör[illegible]rchen betrachten könne, welche durch Fäden oder Stangen getrennt sind, vermittelst welcher sich die Wirkung von einer Kraft zur andern, von Glied zu Glied mittheilt; und so kann man auch jede Maschiene auf die mit Stricken, oder auf den Hebel, [illegible] so gar auf eine von diesen beyden Maschienen allein zurückführen; jedoch nennt man nicht allein jene erstern, sondern auch die Rolle, die Welle, die schiefe Ebene, die Schraube und den Keil einfache Maschienen. Es ist nicht meine Absicht, die besondern Eigenheiten einer jeden von ihnen aufzuzählen, weil das, wie ich schon bemerkt habe, der Gegenstand ausführlicher Untersuchungen über die Statik ist; meine Absicht ist bloß einige Bemerkungen über die Eigenschaften, welche allen Maschienen gemeinschaftlich zukommen, zu machen.

In welchem [illegible] die Maschiene bewegt, oder [illegible] [illegible] bringen auch [illegible] Wirkun[illegible]

gen, von sehr verschiedener Beschaffenheit, hervor; weil nämlich bey den sich bewegenden Maschienen noch eine Rücksicht mehr eintritt, als bey denen, welche sich in Ruhe befinden; nämlich die Geschwindigkeit des Punctes, in welchem jede dieser Kräfte angebracht ist. Im Fall des Gleichgewichts hat man bloß auf die Intensität der Kräfte zu sehen; aber bey der Bewegung muß man auch noch auf den von jeder zurück zu legenden Weg Rücksicht nehmen. So bringt z. B. die Kraft eines Menschen, welcher, vermittelst einer Rolle seine Kraft auf ein Gewicht wendet, zwey Wirkungen von verschiedener Natur hervor, je nachdem es durch dieselbe bloß erhalten, oder bis zu einer gewissen Höhe gehoben werden soll.

Indeß müssen diese beyden Wirkungen auf eine innige Art mit einander verbunden seyn, und sind es auch wirklich; denn die eine ist nichts, als ein besonderer Fall der andern; der Fall des Gleichgewichts ist nichts anders, als der Fall einer Bewegung, wo die Geschwindigkeit sich auf 0 reducirt, d. h. er ist eigentlich die Grenze der Bewegung. Auch stehen für den Fall des Gleichgewichts, wie für den der Bewegung, die beyden Kräfte jederzeit im wechselseitigen Verhältniß mit ihren beyderseitigen Geschwindigkeiten, nach der Richtung dieser Kräfte geschätzt (219.); allein bey der Bewegung ist von wirklichen Geschwindigkeiten die Rede, anstatt daß beym Gleichgewicht bloß von virtuellen Geschwindigkeiten die Rede ist, d. h.

en [illegible] unendlich kleinen Geschwindigkeiten, welche [illegible] Kräfte haben würden, wenn eine von ihnen [illegible] Uebergewicht erhielte, und diese kleine Bewegung hervorbrächte.

253. Diese Grundeigenschaft, welche in gewisser Rücksicht beyden Fällen gemein ist, läßt zugleich ihre charakteristischen Verschiedenheiten erkennen. Denn es ergiebt sich aus ihr, daß eine überaus kleine Kraft ein sehr großes Gewicht recht gut im Gleichgewichte erhalten könne; wenn es aber darauf ankommt, es bis zu einer gegebenen Höhe, z. B. der eines Meters, zu erheben, so wird die Kraft um eine um so viel größere Anzahl von Metern herunterfeigen müssen, je kleiner sie im Verhältniß zu dem Gewichte ist. Beträgt z. B. diese bewegende Kraft nur den [illegible] Theil des Gewichts, so wird sie [illegible] der oben genannten [illegible]; doch wenn sie es bewegen will, so muß sie [illegible] Meter niedersteigen, um das Gewicht einen Meter hoch zu heben.

Und [illegible] Wirkung einer Kraft, welche [illegible] zur Ruhe angebracht ist, nach [illegible] Gewichte, die Wirkung [illegible] in Bewegung angebracht [illegible] nach diesem Gewichte [illegible] sondern auch nach der [illegible] man es hin aufgehoben [illegible] man, daß

nennt, d. h. mit derselben Kraft und derselben Geschwindigkeit, in derselben Zeit angewendet, das gegebene Gewicht P auf eine größere Höhe zu heben, als auf H; oder ein größeres Gewicht bis zu derselben Höhe, oder endlich dasselbe Gewicht in einer kürzeren Zeit zu der nämlichen Höhe.

[illegible]. Der Vortheil, welchen die Maschienen verschaffen, besteht also nicht in dem Hervo·bringen großer Wirkungen durch kleine Mittel, sondern darinn, daß sie die Wahl lassen, unter mehrern Mitteln, welche man gleich nennen kann, dasjenige zu wählen, welches am besten für die gegenwärtigen Umstände paßt. Um ein Gewicht P zu nöthigen, bis zu einer vorgeschriebenen Höhe zu steigen, oder eine Springfeder sich um eine gegebene Größe zusammen pressen zu lassen, oder einen Körper, in unmerkbaren Graden eine gegebene Bewegung anzunehmen, oder irgend ein anderes, bewegliches Werkzeug, einen gegebenen Thätigkeitsmoment aufzureiben, wird erfordert, daß die dazu bestimmten, bewegenden Kräfte selbst einen, dem ersten gleichen Thätigkeitsmoment aufreiben; davon kann keine Maschiene befreyen. Da aber dieser Moment aus mehrern Gliedern oder Factoren resultirt, so kann man sie beliebig verändern, indem man die Kraft auf Unkosten der Zeit, oder die Geschwindigkeit auf Unkosten der Kraft vermindert; oder auch, indem man zwey und mehrere Kräfte zugleich anwendet; und dieß öffnet eine unendliche Menge von Auswegen, um den erforderli-

chen Thätigkeitsmoment hervorzubringen. Aber, was man auch thun mag, so müssen doch immer diese Mittel einander gleich seyn, d. h. der durch die antreibenden Kräfte consumirte Thätigkeitsmoment muß immer der Wirkung, oder dem Momente, welches die widerstrebenden Kräfte in derselben Zeit consumiren, gleich seyn.

259. Diese Bemerkungen scheinen hinreichend, um denjenigen aus dem Irrthum zu helfen, welche glauben, daß man durch eine geheimnißvolle Anordnung der Hebel bey Maschienen ein Agens, eine treibende Kraft, sie sey, so schwach sie wolle, doch in den Stand setzen könne, die größten Wirkungen hervorzubringen; der Irrthum liegt darinn, daß man sich überredet, es lasse sich auf Maschienen in Bewegung dasjenige anwenden, was doch nur für den Fall des Gleichgewichts gilt; denn, weil man z. B. mit einer sehr kleinen Kraft ein überaus großes Gewicht im Gleichgewicht erhalten kann, so glauben viele, man könne es dadurch auch so geschwind, als man wolle, in die Höhe heben; nun ist dieß aber ein grober Irrthum, weil um dieß zu bewerkstelligen, das Agens sich selbst eine, ihr Vermögen übersteigende Geschwindigkeit, oder wenigstens eine solche geben müßte, wodurch sie um so viel mehr von ihrer Wirksamkeit auf die Maschiene verlöhre, je geschwinder sie sich zu bewegen genöthigt wäre. Eben darum ist die Wirkung der Maschienen in Bewegung jederzeit so eingeschränkt, daß sie nie den durch das Agens, das

...ungs, consumirten Thätigkeitsmom... zwingen kann.

260. Ohne Zweifel geschieht es aus Mangel hinlänglicher Aufmerksamkeit auf diese verschiedenen Wirkungen einer und derselben Maschine, je nachdem man sie bald in Ruhe, bald in Bewegung betrachtet, wenn bisweilen Personen, denen die gesunde Theorie ganz und gar nicht unbekannt ist, sich den abentheuerlichsten Vorstellungen überlassen, indeß man den gemeinen, einfältigen Taglöhner durch eine Art Instinkt die wahren Eigenschaften der Maschienen geltend machen und richtig von ihren Wirkungen urtheilen sieht. Archimedes verlangte nur einen Hebel und einen festen Punct, um die Erdkugel empor zu heben; wie sollte es aber da nicht möglich seyn, sagt man, daß ein so starker Mensch, wie Archimedes, selbst mit der schönsten Maschiene von der Welt nicht binnen einer Secunde Zeit eine Last von hundert Pfunden bis zu einer mäßigen, gegebenen Höhe sollte hinausbringen können? Der Grund ist, weil die Wirkung einer Maschiene in Ruhe, und einer Maschiene in Bewegung, zwey ganz verschiedene, und gewissermaßen ganz entgegengesetzte Dinge sind. Im ersten Falle kommt es darauf an, die Bewegung zu verhindern, aufzuheben; im zweyten darauf, sie entstehen und fortdauern zu lassen; nun ist klar, daß man in diesem letztern noch etwas Weiteres, als in jenem beobachten muß, nämlich die wirkliche Geschwindigkeit jedes Punctes im

[illegible] und [illegible] Grund [illegible]
[illegible] durch folgende [illegible]

[illegible] und alle [illegible]
[illegible] Kräfte, [illegible]
[illegible] Bewegung [illegible]
[illegible] in einem [illegible]
[illegible], man [illegible]
[illegible] man will; [illegible]
[illegible] man im Falle [illegible]
[illegible] Kraft sagt, [illegible]
[illegible] wird nicht [illegible]
[illegible] den Widerstand [illegible]
[illegible] die kleine hebt eigentlich [illegible]
[illegible] großen auf, [illegible]
[illegible] Hätte [illegible]
[illegible], so [illegible]
[illegible] die Erfahrung [illegible]
[illegible] Kraft hätte [illegible]
[illegible]
[illegible], sondern [illegible]
[illegible]

wirken
bleibe
sich ei
stellun
in ein
nimmt
des S
die si
würde
würde
der W
cirt m
geschä
= o

W

man
angen
auch
hart
Gesch
Fälle
Falle
ner
ihre
Bew
zu









